Physikalische Zeitschrift

Begründet von **E. Riecke** und **H. Th. Simon**

vereinigt mit dem

Jahrbuch der Radioaktivität und Elektronik

begründet von **Johannes Stark**

Herausgegeben von

Prof. Dr. **P. Debye** in Leipzig und Prof. Dr. **R. Seeliger** in Greifswald

---

ZWEIUNDDREISSIGSTER JAHRGANG

1931

Mit 6 Tafeln

Verlag von S. Hirzel in Leipzig

1931

530.5
P 5691
v. 32

WITHDRAWN
from
OBERLIN COLLEGE
LIBRARY

Druck von August Pries in Leipzig.
Printed in Germany.

PHYSIKALISCHE ZEITSCHRIFT

vereinigt mit dem

JAHRBUCH DER RADIOAKTIVITÄT UND ELEKTRONIK

Nr. 1 — 1. Januar 1931 — Redaktionsschluß für Nr. 3 am 10. Januar 1931. — 32. Jahrgang

INHALT:

Originalmitteilungen:

Cl. Schaefer und H. Pese, Zur Methodik der Farbmessung. S. 1.

L. Schames, Über den direkten Zusammenhang von Zustandsgleichung und innerer Reibung. S. 16.

R. Sänger, Temperaturabhängigkeit der Molekularpolarisation von Propylchlorid und 1,2 Dichloräthan, insbesondere unter Berücksichtigung der freien Drehbarkeit. S. 21.

J. M. Fogelberg und J. W. Williams, Die Anwendung der Debyeschen Dipoltheorie auf binäre Flüssigkeitsgemische. III. S. 27.

E. Brüche, Wo erreichen kosmische Elektronenstrahlen die Erdkugel? S. 31.

J. Kudar, Über die Eigenschaften der Kernelektronen. S. 34.

E. Schöbitz, Über die Schärfe der Beugungsmaxima von Elektronenwellen. Mit Tafel I. S. 37.

M. ten Bosch, Wärmeübergang von tropfbaren Flüssigkeiten in Rohren. S. 39.

L. Schiller und Th. Burbach, Bemerkung zu der vorstehenden Abhandlung von M. ten Bosch. S. 43.

J. Letzmann, Über einige Fälle diskontinuierlicher Rotationsfelder. Mit Tafel II. S. 43.

F. Albrecht, Theoretische Untersuchungen über die Ablagerung von Staub aus strömender Luft und ihre Anwendung auf die Theorie der Staubfilter. S. 48.

J. Zahradníček, Zwei akustische Vorlesungsversuche. S. 56.

Besprechungen:

W. Wien und F. Harms, Handbuch der Experimentalphysik. IV. Band. 3. Teil. S. 59.

A. Eucken, Lehrbuch der chemischen Physik. S. 60.

B. Sander, Gefügekunde der Gesteine. S. 60.

M. Mason and W. Weaver, The Electro-magnetic Field. S. 61.

W. Ewald, Die optische Werkstatt. S. 61.

W. v. Ignatowsky, Die Vektoranalysis und ihre Anwendung in der theoretischen Physik. I und II. S. 61.

I. L. Trillat, Les Applications des Rayons X. S. 62.

K. Fajans und F. Wüst, Physikalisch-chemisches Praktikum. S. 62.

I. L. Coolidge, Einführung in die Wahrscheinlichkeitsrechnung. S. 62.

L. Bieberbach, Analytische Geometrie. S. 63.

R. Staub, Der Bewegungsmechanismus der Erde. S. 63.

A. Hurwitz — C. Courant, Funktionentheorie. S. 63.

Cl. Schaefer und H. Matossi, Der Ramaneffekt. S. 63.

A. Haas, Materiewellen und Quantenmechanik. S. 64.

K. Gruhn, Anfangsgründe der Wechselstromtechnik. S. 64.

A. Magnus, Lehrbuch der Thermodynamik. S. 64.

Personalien, S. 64.

ORIGINALMITTEILUNGEN.

Zur Methodik der Farbmessung.

Von Clemens Schaefer und Herbert Pese.

I. Zur Ostwaldschen Methodik.

1. Bedeutung des Ostwaldschen Farbenatlasses.

Während Untersuchungen über die Grundlagen von Farbtheorien — Wahl und Definition ihrer Komponenten — nur Physiker und Physiologen interessieren, erfreut sich ihre Anwendung — die Messung und Kennzeichnung von Farben — in weiten Kreisen der beschreibenden Naturwissenschaft, der Industrie und des Kunstgewerbes einer ständig wachsenden Anteilnahme. Die Folge hiervon ist die oft wenig kritische Übernahme aller möglichen Meßmethoden, da man mehr auf bequeme Handhabung als auf eine wissenschaftlich einwandfreie Meßweise sieht. Anderseits ist die große Anzahl neuer Apparate und Methoden, welche immer wieder zur Messung von Farben angegeben werden, ein Zeichen dafür, daß es tatsächlich noch keine Möglichkeit gibt, Farben zugleich fehlerfrei, schnell und ohne Aufwendung größerer experimenteller Mittel zu bestimmen.

So betrachtet, stellt die Herstellung des Ostwaldschen Farbenatlasses zweifellos einen Fortschritt hinsichtlich einer praktischen Kennzeichnung von Pigmenten dar. Trotz mancher technischer Mängel, welche ihm heute noch anhaften — hohe Lichtempfindlichkeit der Farbblättchen, geringe Sättigung der roten Farben —, ist die ihm zugrundeliegende Idee als durchaus brauchbare Lösung anzusehen: unter einer (mit Ausnahme der roten Farbtöne) praktisch genügenden Anzahl von Pigmenten verschiedener Reizart und Helligkeit erlaubt er durch bloßen Vergleich einen Farbaufstrich herauszusuchen, welcher der zu kennzeichnenden Farbe hinreichend genau entspricht. Die bloße Angabe der Kennziffer, welche dem ausgesuchten Farbblättchen aufgedruckt ist, ermöglicht es dann jederzeit, aus irgendeinem anderen Exemplar des Farbatlasses dieselbe Farbe zu finden.

Eine weitergehende Bedeutung als die von systematisch geordneten Kennziffern kommt der Ostwaldschen Bezeichnungsweise — wie früher nachgewiesen[1]) wurde — allenfalls bei den wenig gesättigten Farben zu, für welche die Ostwaldschen Angaben des Weiß- und Schwarzgehaltes sich angenähert mit den entsprechenden exakt zu messenden Werten decken. In allen Fällen, in denen man eine Farbe nur dann als bestimmt ansehen kann, wenn für ihre Komponenten absolut richtige, von jeder willkürlichen Definition freie Werte angegeben werden, ist die Ostwaldsche Systematik nicht brauchbar. Um die Vorzüge, welche die Benutzung des Ostwaldschen Farbenatlasses mit sich bringt, trotzdem mit den Anforderungen einer exakten Farbmessung zu vereinen, tauchte schon vor einiger Zeit das Problem einer Transformation der Ostwaldschen Meßweise in die exakte auf. Bevor wir auf diese Frage näher eingehen können, muß als die grundlegende Voraussetzung der Ostwaldschen Farbensystematik das sogenannte Farbenhalb kurz behandelt werden.

2. Das Farbenhalb.

Bei der Untersuchung gelber Pigmente stellte Ostwald den „Satz vom Farbenhalb" auf, der sich nach seiner Angabe auch „... bei der Untersuchung anderer gesättigter Farben durchgängig bestätigte". Dieser Satz besagt, daß „zu einer gesättigten Farbe sämtliche Farben zusammenwirken müssen, welche innerhalb der Hälfte eines Farbkreises liegen". Die Grenzen der remittierten Farben werden gebildet durch ein Paar Gegenfarben, deren Farbtonnummern im hundertteiligen Farbatlasse sich um 50 Einheiten unterscheiden (bzw. um 12 Einheiten im 24teiligen Atlasse), während die resultierende gesättigte Farbe mit dem in der Mitte des Remissionsgebietes liegenden Farbtone übereinstimmt, der also 25 (bzw. 6) Einheiten von den Grenzen entfernt ist. Als Beispiel sei auf Fig. 1a hingewiesen, welche die Remission eines solchen Pigmentes von idealer Sättigung — einer „Vollfarbe" nach Ostwald — zeigt. Diesem Typus entsprechen nur die Farbtöne zwischen 71 und 00, bei allen anderen macht sich die „spektrale Lücke" (das sind die nicht im Spektrum vorhandenen Purpurtöne Nr. 25 bis Nr. 46) störend geltend. Das Farbenhalb wird dann unvollständig: entweder tritt die eine Grenze über das rote Ende des Spektrums hinaus (dies gilt für die Farben Gelb, Orange, Rot, d. h. für die Farbtonnummern zwischen 0 und 21 (Fig. 1b)) oder aber die andere Grenze überschreitet das violette Ende des Spektrums (diesem in Fig. 1c gezeichneten Typ gehören die violetten, blauen und blaugrünen Farbtöne zwischen Nr. 46 und Nr. 71 an). Bei den hochroten, purpurroten und violetten Farben (zwischen Nr. 21 und Nr. 50) sind zwar beide Grenzen des Farbenhalbs vorhanden, dieses selbst wird jedoch durch die spektrale Lücke in zwei Teile zerschnitten (Fig. 1d). Die ohne weiteres verständlichen Bezeichnungen der vier Typen als „Mittelpigment", „Langendpigment", „Kurzendpigment" und „Mittelfehlpigment" stammen von E. Schrödinger[2]). Auch beim Übergang von den idealen Vollfarben zu den realen Pigmenten geringerer Sättigung gilt alles über die Grenzen des Farbenhalbs Gesagte, nur daß die Absorption im Absorptionsgebiete keine vollständige mehr ist, sondern dort eine dem „Weißgehalte" entsprechende Menge Licht remittiert wird, während die Höhe des Remissionsgebietes desto geringer ist, je größeren „Schwarzgehalt" das Pigment enthält[3]).

Eine solche Schematisierung hat natürlich nur dann einen Sinn, wenn sie die wirklichen Verhältnisse bis auf geringfügige Abweichungen wiedergibt. Sind die Abweichungen zu groß, so liegt nicht der geringste Grund vor, die tatsächlichen Remissionskurven in ein willkürlich

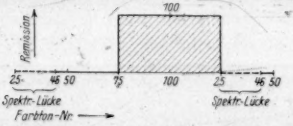


Fig. 1a.

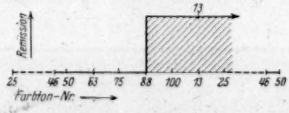


Fig. 1b.

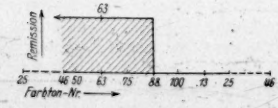


Fig. 1c.

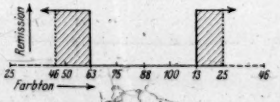


Fig. 1d.

1) Cl. Schaefer und H. Pese, Physik. Zeitschr. **31**, 720—737, 1930.
2) E. Schrödinger, Theorie der Pigmente von größter Leuchtkraft, Ann. d. Phys. **62**, 603—622, 1920.
3) Schaefer und Pese, l. c., III, 11.

konstruiertes Schema einzuzwängen. Obwohl Ostwald selbst die Definition des Farbenhalbs als einen „idealen Grenzfall" bezeichnet, „dem sich die Wirklichkeit zwar annähern kann, den sie aber niemals erreicht[1])", und im 10. Kapitel seiner physikalischen Farbenlehre auf verschiedene Abweichungen hinweist, hält er diese anscheinend für so unbedeutend, daß er auch heute noch dem Farbenhalb einen hervorragenden Platz in seiner Farbenlehre einräumt[2]).

3. Mittelbare Prüfung der Ostwaldschen Methodik: „Neutralisation von Gegenfarben."

Eine Prüfung für die Richtigkeit des Farbenhalbs, zugleich auch für die Bestimmung der Reinheit, des Weiß- und Schwarzgehaltes, sieht Ostwald in einer Untersuchung, welche in der oben erwähnten Veröffentlichung aus dem Jahre 1916 zu finden ist. Es handelt sich um die Frage, ob das Verhältnis, in dem zwei Gegenfarben miteinander gemischt „grau" ergeben, dasselbe ist wie das reziproke Verhältnis ihrer Ostwaldschen „Reinheiten" oder nicht. Durch Mischen der Gegenfarben „eines" Farbkreises (welchen er benutzt, gibt Ostwald leider nicht an) zeigt sich eine gute Übereinstimmung der Neutralisations- und der Reinheitsverhältnisse. Diese Übereinstimmung wäre ohne weiteres zu erwarten, wenn die Definitionen der Reinheit, des Weißgehaltes und des Farbenhalbes mit den Tatsachen übereinstimmten. Es seien (in den Fig. 2a und 2b) I und II Gegenfarben

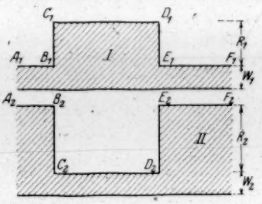


Fig. 2a.

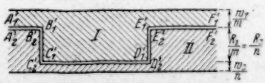


Fig. 2b.

mit den Reinheiten R_1 bzw. R_2 und den Weißgehalten W_1 bzw. W_2, wobei $R_2 > R_1$ sei. Mischt man die beiden Farben, so fällt zufolge der Definition das Absorptionsgebiet der einen Farbe genau in das Remissionsgebiet der Gegenfarbe; die Mischfarbe wird also sehr weißlich. Sie wird offenbar vollkommen neutral aussehen, wenn man die Einzelfarben in solchem Verhältnisse mischt, daß man das Stück B_1C_1 der Strecke B_2C_2 gleichmacht, indem man die Ordinaten von I auf $\frac{1}{m}$ und die von II auf $\frac{1}{n}$ ihrer Höhen reduziert, wie es in Fig. 2b angedeutet ist. Dann ist:

$$\frac{B_1C_1}{m} = B_1'C_1' \quad \text{und} \quad \frac{B_2C_2}{n} = B_2'C_2'.$$

Da aber $B_1'C_1' = B_2'C_2'$ sein soll, so folgt:

$$\frac{B_1C_1}{m} = \frac{B_2C_2}{n} \quad \text{oder} \quad \frac{B_1C_1}{B_2C_2} = \frac{m}{n}.$$

Nun ist definitionsgemäß $B_1C_1 = R_1$ und $B_2C_2 = R_2$, also verhalten sich die Reinheiten:

$$R_1 : R_2 = m : n,$$

während wir vorausgesetzt hatten, daß die Farben I und II im Verhältnisse $\frac{1}{m} : \frac{1}{n}$ gemischt wurden, also im reziproken Verhältnisse ihrer Reinheiten. Da, wie es aus Fig. 2b hervorgeht, die Remissionskurve der Mischfarbe eine Parallele zur Abszisse ist, so besteht vollständige Identität zwischen jenen und einem neutral grauen Blättchen, dessen Remission im sichtbaren Gebiet unabhängig von der Wellenlänge ist, d. h. aber: jeder Beobachter sieht die Mischfarbe ebenso wie er ein neutral graues Pigment sieht, so daß die Einstellung vollkommen unabhängig von den individuellen Verschiedenheiten der Grundempfindungskurven bleibt. Umgekehrt könnte man mit an Gewißheit grenzender Wahrscheinlichkeit schließen:

Wenn mehrere Beobachter Ostwaldsche Gegenfarben übereinstimmend im umgekehrten Verhältnisse ihrer Reinheit zu neutralem Grau mischen, so wären die Annahmen Ostwalds hinsichtlich der Definitionen von Reinheit, Weißlichkeit und damit auch des Schwarzgehaltes (welcher infolge der Ostwaldschen Farbengleichung $R + W + S = 1$ durch die Angabe von R und W bestimmt wird) und sein Satz vom Farbenhalb richtig. In der erwähnten Veröffentlichung Ostwalds zeigt sich eine gute Übereinstimmung zwischen dem reziproken Verhältnisse der Reinheit und dem Verhältnisse der Mischung, welche Neutralisation ergibt. Im Buch 2 seiner „Farblehre" gibt Ostwald die verhältnismäßig wenig von seinen eigenen Angaben abweichenden Ergebnisse eines zweiten Beobachters an, die sich allerdings nicht über den ganzen Farbkreis erstrecken. Trotzdem erschien es angebracht, entsprechende Messungen nochmals vorzunehmen, da — wie bereits nach-

1) W. Ostwald, „Neue Forschungen zur Farbenlehre", Physik. Zeitschr. **17**, 329, 1916.
2) W. Ostwald, Sitzber. d. Preuß. Akad. d. Wiss., Physik.-math. Klasse, 1929, S. 13ff.

gewiesen — stärkere Abweichungen in den Messungen eines einzigen Beobachters in einwandfreier Weise die Ostwaldschen Voraussetzungen widerlegen würden.

Es wurden Paare von Gegenfarben aus dem Farbkreise *pi* gemischt, welcher wenig „Weiß", aber ziemlich viel „Schwarz" enthält, und dem die Ostwaldsche Reinheit VI zukommt. Das Ergebnis ist in Fig. 4 dargestellt und zeigt nicht unerhebliche Abweichungen gegenüber den entsprechenden Ostwaldschen Neutralisationsverhältnissen. Noch größere Differenzen weisen die Mischungen von Gegenfarben aus dem Farbkreise *nc* auf, einem der gesättigtsten unter allen vollständigen Farbkreisen, welcher wenig Weiß und wenig Schwarz enthält und in Ostwaldscher Bezeichnung die Reinheit X besitzt. Erfreulicherweise liegen für diesen Farbkreis entsprechende Messungen noch von anderer Seite vor, nämlich von K. W. F. Kohlrausch. Sie dienten ihm als Probe, um die Größe der zwischen seinen und den Augen Arthur Königs bestehenden Unterschiede in Annäherung festzustellen. Hierzu bestimmte er das für König gültige Neutralisationsverhältnis zweier Ostwaldscher Gegenfarben auf indirekte Weise: mittels der Königschen Grundempfindungskurven lassen sich die Orte zweier Gegenfarben in das Helmholtzsche Dreieck eintragen, in welchem sie zu beiden Seiten des Weißpunktes liegen müssen; die Orte der Gegenfarben sollen mit F' und F'' bezeichnet werden (Fig. 3). Wenn diese Farben auch für das Auge Königs komplementär sind, so liegt der Weißpunkt auf ihrer Verbindungslinie, welche

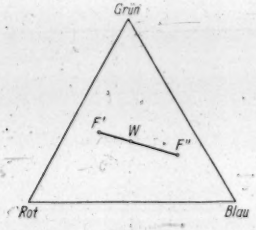


Fig. 3.

durch ihn in die Abschnitte $F'W$ und WF'' geteilt werde. Damit nun die beiden Farben Weiß bzw. Grau ergeben, müssen sie nach dem Schwerpunktssatze im umgekehrten Verhältnisse ihrer Entfernungen $F'W$ bzw. WF'' vom Weißpunkte W gemischt werden.

Nachdem Kohlrausch für eine Reihe von Gegenfarben die Orte im Helmholtzschen Farbendreieck bestimmt hatte, maß er ihre Entfernungen vom Weißpunkte und gewann damit die Neutralisationsverhältnisse, welche König bei unmittelbarer Farbmischung hätte einstellen müssen.

Diese indirekt gewonnenen Königschen Werte und die direkt von Kohlrausch gemessenen Werte wurden der Fig. 2 in der zitierten Arbeit von Kohlrausch entnommen und zum Vergleich in Fig. 5 eingetragen. Wie man sieht, zeigen die vier Kurvenzüge erhebliche Unterschiede, die sich nur durch objektive Verschiedenheiten der Grundempfindungskurven bei den erwähnten — an und für sich natürlich farbentüchtigen — Beobachtern erklären lassen. Damit sind die Folgerungen Ostwalds hinfällig, der in den Ergebnissen seiner erwähnten Arbeit

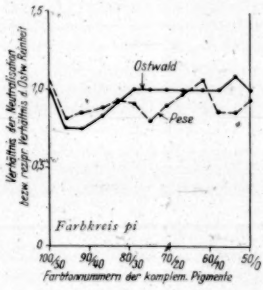


Fig. 4.

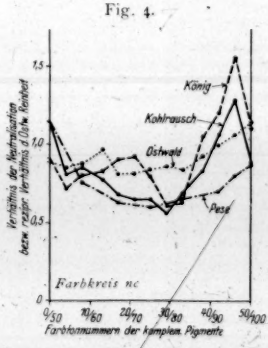


Fig. 5.

einen Beweis für die objektive Gültigkeit seiner Art der Farbmessung wie auch für die Richtigkeit der von ihm eingeführten Definitionen und des Satzes vom Farbenhalb sieht.

4. Unmittelbare Prüfung der Ostwaldschen Methodik: Gegenüberstellung schematisierter und tatsächlicher Remissionskurven.

Diese Annahmen Ostwalds lassen sich auch direkt prüfen, indem man den rechteckigen

Kurvenzug zeichnet, welcher sich unter Voraussetzung strenger Gültigkeit des Satzes vom Farbenhalb aus den Ostwaldschen Angaben über Weiß- und Schwarzgehalt eines Farbblättchens ergibt. Trägt man in demselben Maßstabe die Remissionskurve des betreffenden Pigments in die gleiche Zeichnung ein, so muß sich zeigen, in welcher Annäherung der wirkliche Remissionsverlauf durch den rechteckigen Kurvenzug ersetzt werden kann.

Eine solche Gegenüberstellung von schematisierter und tatsächlicher Remissionskurve findet sich zuerst bei Cl. Schaefer[1]), gegen dessen Darstellung Schollmayer verschiedene Einwände[2]) erhebt. So soll es beispielsweise falsch sein, die Remission als Funktion der Wellenlänge aufzutragen, sie soll vielmehr in Abhängigkeit vom Farbtone gezeichnet werden. Demgemäß wurden für die acht „gleichabständigen" Farbblättchen o, 13, 25, 38, 50, 63, 75 und 88 des Farbkreises *nc* die gemessenen und die schematisierten Remissionskurven als Funktionen des Farbtones eingetragen[3]). (Siehe die Fig. 7a—7h.) Nach Schollmayer besteht dann zwischen der schematisierten Remissionskurve, dem „vereinfachten Spektrum", und der wirklichen Remissionskurve ein solcher Zusammenhang, daß „die wirkliche Kurve durch die wagerechten Stücke des Rechteckszuges in jedem Teile für sich eingeebnet wird".

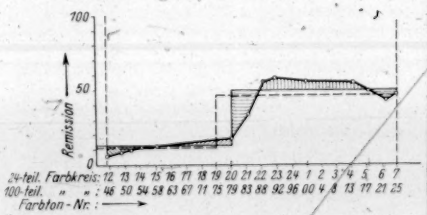


Fig. 6.

Als Musterbeispiel[4]) berechnet und zeichnet er die Herstellung „des vereinfachten Spektrums" der Farbe oo *nc* (bzw. 1 *nc*), woran er noch einige Folgerungen knüpft, um die von Schaefer gegen die Berechtigung einer so weitgehenden Schematisierung der Remissionskurven erhobenen Einwände zu entkräften. Schollmayer irrt sich jedoch in der Bestimmung der Grenze zwischen Remissions- und Absorptionsgebiet, da diese für den Farbton 100 (bzw. 1) nicht bei 79 (bzw. 20) sondern bei 75 (bzw. 19) liegt[1]). Auf Grund der falsch eingezeichneten Grenzen findet er eine Abweichung im Farbtone von etwa 1/250 des Farbkreises (das sind 0,4 Nummern im hundertteiligen oder etwa 0,1 Nummer im 24teiligen Farbkreise), und zwar soll die Farbhalbgrenze um diesen Betrag „zu weit links sitzen". Tatsächlich liegt die Grenze nach Ostwald noch $^1/_{24}$ des Farbkreises, das sind 4 bzw. 1 Nummer — also um das Zehnfache des von Schollmayer abgegebenen Betrages — weiter „nach links"; das bedeutet einen Unterschied in der Tönung, welcher selbst einem ungeübten farbentüchtigen Beschauer deutlich merkbar ist. Bei Berücksichtigung der richtigen Grenze muß man außerdem nach der Schollmayerschen Methode der Einebnung beide Wagerechten tiefer zeichnen, so daß sich ein größerer Schwarz- und ein etwas kleinerer Weißgehalt für die schematisierte Kurve ergibt. Die so berichtigte Kurvenzug ist in Fig. 6 gestrichelt eingezeichnet. Wenn es infolge dieser Fehler auch keinen Sinn hat, auf Einzelheiten des gewählten Beispieles einzugehen, so kann doch manches Prinzipielle an ihm erörtert werden. So geschieht die „Einebnung" der wirklichen Remissionskurve sowohl im Absorptions-, wie auch im Remissionsgebiete dadurch, daß in jedem für sich durch den rechteckigen Kurvenzug des „vereinfachten Spektrums" — der Fläche nach — ebensoviel von der tatsächlichen Remissionskurve abgeschnitten, wie zu ihr hinzugefügt wird. Zur Erläuterung diene Fig. 6, in der abgeschnittene und eingesetzte Stücke durch verschiedene Schraffierungen gekennzeichnet sind. Es werden also die verschiedenen Teile der Remissionskurve ohne jede Rücksicht auf ihre Lage gleichmäßig behandelt, so daß beispielsweise in Fig. 6 die zwischen 79 und 25 liegenden Stücke der Remissionskurve bzw. des vereinfachten Spektrums sich ohne weiteres gegenseitig vertreten sollen, obwohl es sich um einen zwischen 492 $\mu\mu$ und 680 $\mu\mu$ liegenden Bezirk handelt, welcher vom Blaugrün an über Gelb bis Rubinrot fast alle Spektralfarben enthält, und in welchem die Empfindlichkeit des Auges von ihrem Maximalwert bei 555 $\mu\mu$ auf knapp $^1/_4$ dieses Wertes bei 492 $\mu\mu$ und sogar auf $^1/_{60}$ desselben bei 680 $\mu\mu$ sinkt! Ostwald selbst steht diesem Verfahren nicht so bedenkenlos gegenüber wie Schollmayer. So sagt er in einem anderen, aber grundsätzlich vergleichbaren Zusammenhange, er sei „allerdings nicht sicher, ob der hier vorausgesetzte Satz von der gegenseitigen Vertretung flächengleicher Stücke all-

1) Cl. Schaefer, Physik. Zeitschr. **27**, Fig. 6 auf S. 325, 1926.

2) K. Schollmayer, Physik. Zeitschr. **28**, Fig. 3 auf S. 508, 1927.

3) Zur Umrechnung von Wellenlänge auf Farbton dienten die Angaben von W. Ostwald, Phys. Farbenlehre, 110, 1929.

4) K. Schollmayer, l. c., Fig. 3 auf S. 508; s. auch Fig. 6

1) Die eingeklammerten Zahlen beziehen sich auf den 24teiligen Farbkreis.

gemein richtig ist[1])". Die von Schollmayer angewandte Methode der Einebnung kann jedoch schon deswegen bei Ostwald keine Stütze finden, weil dieser nur für die Grenze zwischen Absorptions- und Remissionsgebiet eine merkliche Abweichung des tatsächlichen vom schematisierten Remissionsverlaufe annimmt; es finden nach ihm zwischen beiden Gebieten „Übergänge an Stelle der plötzlichen Änderungen statt[2])". Im übrigen sollen nach Ostwalds Angabe aber auch die wirklichen Remissionskurven (abgesehen von hier nicht in Frage kommenden Ausnahmen) nahezu parallel zur Abszisse verlaufen[3]). Bei einer Diskussion der Fehlerquellen, die bei Anwendung seiner Filtermeßmethode auftreten können, kommt Ostwald außer auf den — in diesem Zusammenhange nicht interessierenden — Einfluß der Breite des Grenzgebietes auch auf die Möglichkeit zu sprechen, daß die wirklichen Remissionskurven außerhalb des Grenzgebietes „nicht genau parallel der Grundlinie verlaufen. Wieweit diese Fehlerquellen wirksam sind, hat die Erfahrung zu entscheiden. Das allgemeine Ergebnis meiner Untersuchungen an vielen tausend Aufstrichen geht dahin, daß diese Fehlerquellen durchschnittlich gering sind, so gering, daß sie unter normalen Bedingungen sich überhaupt nicht bemerklich machen[4])".

Zweifellos rechnet Ostwald selbst die Pigmente des Farbatlasses nicht zu den Ausnahmen, sondern zu den normalen Fällen. Bestätigte sich an ihnen der von Ostwald behauptete in wesentlichen Teilen wagerechte Verlauf „normaler" Remissionskurven, wodurch eine Einebnung im Sinne Schollmayers natürlich gegenstandslos würde, so wäre das eine starke Stütze für die Ostwaldsche Schematisierung. Anderseits müßten stärkere Abweichungen von dem behaupteten Verlaufe der Remissionskurven als schwerwiegende Einwände gegen die Ostwaldsche Meßmethodik gewertet werden, da hiermit eine ihrer wichtigsten Voraussetzungen fallen würde.

Wieweit Schollmayers Forderung, die Remission als Funktion des Farbtones und nicht der Wellenlänge einzutragen, sich auf Ostwald stützen kann, soll dahingestellt bleiben. Auf jeden Fall gibt auch sie Anlaß zu Bedenken; zwischen 430 $\mu\mu$ und 655 $\mu\mu$ ist jeder Wellenlänge ein Farbton eindeutig zugeordnet, so daß es für diesen Bereich gleichgültig ist, ob man die Remission im Farbkreis- oder im Wellenlängenspektrum aufträgt. In den beiden Bereichen zwischen den angegebenen Wellenlängen und den Grenzen des sichtbaren Spektrums, also in den sogenannten Endstrecken von etwa 390 $\mu\mu$ bis 430 $\mu\mu$ und etwa 655 $\mu\mu$ bis 760 $\mu\mu$[1]) bleibt dagegen der Farbton unverändert, so daß den beiden Strecken im Wellenlängenspektrum nur je ein Punkt im Farbtonspektrum entspricht. Mit anderen Worten: wählt man die Darstellung im Farbtonspektrum, so wird die Remissionskurve in ihren Endpunkten mehrdeutig und ist nicht imstande, ein Bild vom Verlaufe der Remission in den genannten Endspektren zu geben.

Die in Fig. 7a bis 7h eingetragenen Remissionsfunktionen der Farben o, 13, 25, 38, 50, 63, 75 und 88 aus dem Farbkreise *nc* wurden von K. W. F. Kohlrausch[2]) gemessen. Diese Werte sind durch völlig unabhängige Messungen von Gibsone[3]) gut bestätigt, derart, daß die von ihnen gefundenen Remissionskurven ein- und desselben Pigments bis auf einen konstanten Faktor von etwa 1,13 nahezu identisch sind. Daß eine solche Erweiterung notwendig ist, um jede von Kohlrausch stammende Remissionskurve mit der entsprechenden von Gibsone zur Deckung zu bringen, erklärt sich sehr einfach aus einer verschiedenen Albedo der in beiden Fällen als Vergleichsweiß benutzten Pigmente: Das von Kohlrausch benutzte Bezugsweiß hat eine um 13 Proz. größere Remission, die von ihm gefundenen Werte sind also entsprechend kleiner als diejenigen, welche von Gibsone angegeben werden. Hieraus erhellt, daß man aus diesen Remissionskurven zwar keine sehr genauen Schlüsse auf die absoluten Höhen der Ordinaten ziehen kann — mit anderen Worten: diese Kurven eignen sich wenig für Vergleiche hinsichtlich des Ostwaldschen Weiß- und Schwarzgehaltes —, daß man dagegen aus ihnen ein zutreffendes Bild über den allgemeinen Verlauf der wirklichen Remissionskurven der verschiedenen Farben eines Farbkreises gewinnen kann.

Es sind besonders zwei Gesichtspunkte von Interesse: einmal die Lage der „Grenzgebiete" im Vergleich zu den Grenzen des entsprechenden Farbenhalbes und zweitens der Verlauf der tatsächlichen Remissionskurven außerhalb der Grenzgebiete, welcher, wie oben erwähnt, nach Ostwald nahezu parallel zur Abszisse sein soll. Die verhältnismäßig beste Übereinstimmung zwischen Farbhalbgrenze und wirklicher Grenze

1) Phys. Farbenlehre, S. 243, 1919.
2) Phys. Farbenlehre, S. 204, 1919.
3) ibid., S. 205.
4) ibid., S. 205.

1) Da sich im Gegensatze zur kurzwelligen Endstrecke die Empfindlichkeit des Auges im langwelligen Endgebiete nur allmählich ändert, so ist praktisch für diesen Bereich ein Gebiet von 655 $\mu\mu$ bis etwa 720 $\mu\mu$ anzunehmen. Die angegebenen Werte für die monochromatischen Endstrecken stammen von Helmholtz.

2) Kohlrausch, Physik. Zeitschr. **21**, 396ff., 1920.

3) Gibsone, Diss. Marburg 1925. Siehe auch Schaefer, Physik. Zeitschr. **26**, 58 und 908, 1925.

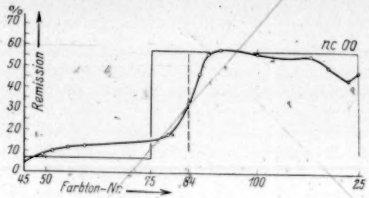


Fig. 7a.

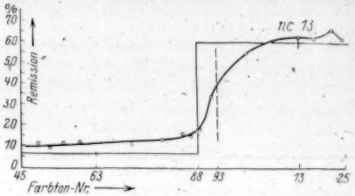


Fig. 7b.

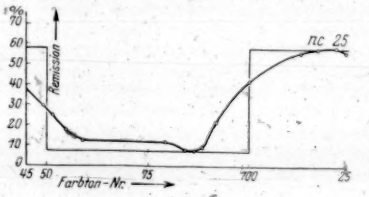


Fig. 7c.

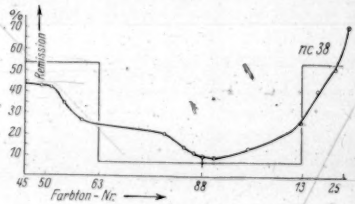


Fig. 7d.

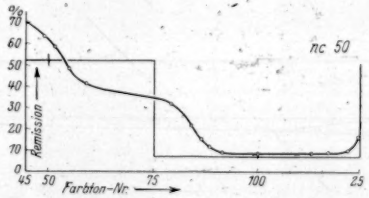


Fig. 7e.

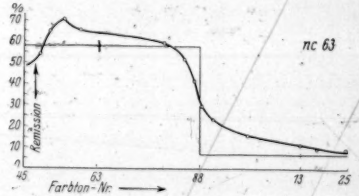


Fig. 7f.

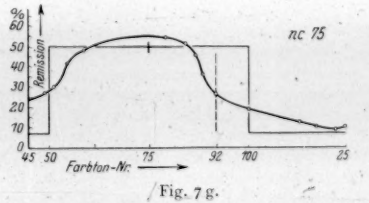


Fig. 7g.

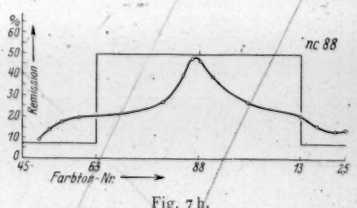


Fig. 7h.

von Absorptions- und Remissionsgebiet zeigt sich beim Farbtone 63 (Fig. 7f); auch beim Farbtone 25 (Fig. 7c) kann man vielleicht noch eine ungefähre Übereinstimmung feststellen — soweit man überhaupt bei dem allmählichen Abfall des Kurvenstückes zwischen den Punkten 89 und 17 der Abszisse von einer ausgeprägten Grenze sprechen kann. Ebenso läßt sich bei den Farbnummern 13 (Fig. 7b) und 75 (Fig. 7g) die Lage der Grenze lediglich angenähert bestimmen, mit einiger Sicherheit aber ist sie nur beim Farbblättchen o (Fig. 7a) festzulegen, da dieses allein einen engen steil abfallenden Übergang vom Absorptions- zum Remissionsgebiete aufweist. Bei den letztgenannten drei Pigmenten erscheint jedoch die Farbhalbgrenze willkürlich gezogen; um den tatsächlichen Verhältnissen gerecht zu werden, müßte man die Grenzen mindestens um die folgenden Stücke verschieben:

beim Farbtone *nc* 00 (Fig. 7a) von Farbton Nr. 75 auf Nr. 84,

beim Farbtone *nc* 13 (Fig. 7b) von Farbton Nr. 88 auf Nr. 93,

beim Farbtone *nc* 75 (Fig. 7g) von Farbton Nr. 100 auf Nr. 92,

wie in den entsprechenden Figuren durch die gestrichelten senkrechten Linien angedeutet ist.

Bei den Pigmenten 38, 50 und 88 (Fig. 7d, 7e und 7h) sind die zugehörigen Farbhalbgrenzen nicht wegen ihrer falschen Lage abzulehnen, sondern weil bei ihren flach verlaufenden Remissionskurven ein bestimmter definierbarer Übergang — eine „Grenze" im Sinne Ostwalds — überhaupt nicht vorhanden ist. Hinsichtlich der Abgrenzung von R. G. gegen A. G. erfüllen also nur die Pigmente 25 und 63 in Annäherung die Ostwaldsche Forderung, während die 6 übrigen betrachteten Farbblättchen gegen sie sprechen.

Für die Beurteilung der anderen Frage, wieweit die Ostwaldsche Forderung einer nahezu vollkommen konstanten Remission in jedem A. G. bzw. R. G. erfüllt sind, sind zwei Gesichtspunkte maßgebend. Einmal die Breite des eigentlichen nach Abzug des Grenzgebietes übrigbleibenden A. G. bzw. R. G. und zweitens das Verhältnis, in welchem der größte und der kleinste Remissionswert innerhalb eines solchen eigentlichen Absorptions- oder Remissionsgebietes zueinander stehen; je mehr dieses Verhältnis sich dem Werte 1 nähert und je breiter das betreffende eigentliche Gebiet ist, desto besser ist die Ostwaldsche Forderung erfüllt — und umgekehrt.

Infolge des selbst in den sogenannten Grenzgebieten flachen Verlaufs der Remissionskurven ist eine einwandfreie Abgrenzung jener gegen die anstoßenden Absorptions- und Remissionsgebiete nicht möglich. Damit entfällt zwar auch die Möglichkeit einer genauen quantitativen Beurteilung der Remissionskurven nach dem oben entwickelten Gesichtspunkte, qualitativ aber lassen sie sich mit ausreichender Sicherheit in drei Gruppen einordnen, je nachdem sie der Ostwaldschen Forderung gut, nur angenähert oder gar nicht entsprechen. In der folgenden Zusammenstellung ist diese Einteilung für die betrachteten 8 Pigmente durchgeführt, und zwar nach Absorptions- und Remissionsgebieten getrennt.

Die Ostwaldsche Forderung konstanter Remission wird

vom Pigmente	*nc* 00	im	R. G.	gut,	im	A. G.	nur angenähert,
„ „	*nc* 13	„	„	nur angenähert,	„	„	gut,
„ „	*nc* 25	„	„	nur angenähert,	„	„	gut,
„ „	*nc* 38	„	„	nicht,	„	„	nicht,
„ „	*nc* 50	„	„	nicht,	„	„	gut,
„ „	*nc* 63	„	„	gut,	„	„	nicht,
„ „	*nc* 75	„	„	gut,	„	„	nicht,
„ „	*nc* 88	„	„	nicht,	„	„	nicht

erfüllt.

Unter den 16 betrachteten Gebieten kann also nur für 6 Gebiete eine gute Übereinstimmung festgestellt werden, während man auch bei vorsichtiger Bewertung für 3 weitere Gebiete eine nur angenäherte und für die übrigen 7 Gebiete überhaupt keine Übereinstimmung mit der Ostwaldschen Forderung finden kann. Eine sowohl im Absorptions- wie auch im Remissionsgebiete gute Übereinstimmung besteht bei keinem Pigmente, während zwei Farbblättchen, die Nrn. 38 und 88, in beiden Gebieten gegenüber jeder Schematisierung versagen.

Die betrachteten Pigmente entstammen dem Farbkreise *nc*, welcher zu den gesättigtsten unter allen vollständigen Farbkreisen gehört. Da nach Ostwalds eigener Angabe bei den weniger gesättigten Farbaufstrichen die Übergangsgebiete einen noch breiteren und flacheren Verlauf zeigen, so eignet sich der gewählte Farbkreis verhältnismäßig noch am besten für eine Schematisierung. Durch die Auswahl der Farbnummern sind alle Farbtöne berücksichtigt, nämlich 00 = Gelb, 13 = Orange, 25 = Rot, 38 = Purpur, 50 = Blau, 63 = Blaugrün, 75 = Grün und 88 = Gelbgrün. Wie die Messungen von Gibsone beweisen, stellen die Remissionskurven der gewählten Pigmente keine zufälligen Sonderfälle dar, sondern dürfen als typische Vertreter betrachtet werden; denn die Remissionskurven der ihren Farbtonnummern nach zwischen ihnen liegenden Farbblättchen zeigen auch in ihrer Form stetige Übergänge zwischen denen der hier beurteilten Pigmente.

Die gefundenen Ergebnisse dürfen also dahin zusammengefaßt werden, daß selbst unter günstigen Voraussetzungen der direkte Vergleich zwischen Ostwaldschem Schema und Remissionskurve kaum in der Hälfte aller Fälle eine mehr oder weniger gute Übereinstimmung, in mehreren Fällen dagegen eine derartige Abweichung zeigt, daß die Ostwaldsche Schematisierung als unbegründete Verallgemeinerung abgelehnt werden muß.

II. Umrechnung von Ostwaldschen Komponenten in Komponenten der exakten Farblehre.

5. Unmöglichkeit einer allgemeingültigen Transformation.

Theoretisch können unendlich viele Pigmente mit voneinander verschiedenen Remissionskurven

dennoch für ein und denselben Beobachter in Farbton, Sättigung und Helligkeit gleich, also in keiner Weise voneinander unterscheidbar, aussehen. Diese schon sehr lange bekannte Tatsache, welche von Ostwald die Bezeichnung „Metamerie" erhalten hat, legt den Gedanken nahe, die Remissionskurve jedes vorgegebenen Pigmentes könnte auch in einer dem Ostwaldschen Schema entsprechenden Weise metamer deformiert werden. Die schematisierten Kurven würden dann zwar nicht ihrer äußeren Form nach — wie oben gezeigt —, wohl aber hinsichtlich ihres Eindrucks auf den farbentüchtigen Beschauer die wirklichen Remissionskurven vollkommen ersetzen können; mit anderen Worten: es wären in diesem Falle schematisierte Kurven und tatsächliche Remissionskurven zwar nicht in physikalischer, wohl aber in physiologischer Beziehung miteinander identisch. Da nach der exakten Farbmessung das Aussehen eines Pigmentes von seinem Gehalt an drei Grundfarben[1]), also von drei Angaben, abhängt, so handelt es sich um die Frage, ob aus diesen drei exakten Werten die Ostwaldschen Bestimmungsstücke Farbton, Weißgehalt und Schwarzgehalt unter Voraussetzung seines Satzes vom Farbenhalb errechnet werden können. Schaefer[2]), welcher diesem Gedanken zuerst nachgegangen ist, hat bewiesen, daß eine solche Umrechnung nur in besonderen Fällen möglich sein kann, im allgemeinen aber unmöglich ist. Nur, wenn man sich nicht an die von Ostwald vorgeschriebenen Grenzen zwischen den Absorptions- und Remissionsgebieten gebunden hält, d. h. „wenn man den Farbenhalbsatz Ostwalds fallen läßt, so ist es in der Tat möglich, alle metameren Pigmente eines Farbtones auf solche Pigmente zurückzuführen, denen die Ostwaldsche Normalform der Remissionskurve zukommt, nur daß eben das Remissionsgebiet im Gegensatz zu Ostwald kein Farbenhalb mehr umfaßt, sondern größer oder kleiner ist"[3]). Es muß also — wie Schaefer weiter folgert — zu den drei Ostwaldschen Bestimmungsstücken als viertes die Angabe der Breite des Remissionsgebietes hinzutreten. Da jedoch bei richtiger Wahl der Komponenten bereits drei Angaben eine Farbe vollständig kennzeichnen, so ist hiermit eindeutig festgestellt, daß die Ostwaldsche Schematisierung der Kurven mit Einschließung des Satzes vom Farbenhalb zur Kennzeichnung eines Pigments grundsätzlich ungeeignet ist. Als weitere Folgerung ergibt sich die Unmöglichkeit einer allgemeingültigen Transformation zwischen den Komponenten der Ostwaldschen Systematik und denen der exakten Farbmessung.

Damit ist aber nicht gesagt, daß man die Ostwaldsche technisch sehr einfache Art der Filtermessung an zwei Stellen der Remissionskurve nicht unter gewissen Voraussetzungen durch Umrechnung für die exakte Farbmessung brauchbar machen kann. Bevor hierauf näher eingegangen werden kann, muß die Ostwaldsche Filtermessung kurz behandelt werden.

6. Filtermessung.

Wenn man irgendein buntes Pigment neben ein neutralgraues legt und beide durch ein streng monochromatisches Filter betrachtet, das lediglich den im sichtbaren Teile des Spektrums liegenden unendlich engen Bereich zwischen $\lambda_s + d\lambda$ und $\lambda_s - d\lambda$ hindurchläßt, so erscheinen beide Pigmente in derselben — nämlich in der der Wellenlänge λ_s zukommenden — Farbe und Sättigung, nur daß im allgemeinen das eine heller aussehen wird als das andere. Indem man nun die Helligkeit des neutralgrauen Vergleichspigmentes ändert, kann man ein auch in der Helligkeit gleiches, also vollkommen voneinander ununterscheidbares Aussehen des bunten und des grauen Farbaufstrichs bei Betrachtung durch dieses Filter erzielen. Da dann die Remission des Buntpigmentes an der Stelle λ_s dieselbe ist wie die Remission des Graupigmentes, so könnte man mit Hilfe einer genügend großen Anzahl von verschiedenen neutralen Grauplättchen, deren sich nur um kleine Stufen unterscheidende Remissionsvermögen bekannt sind, die Remission eines beliebigen Pigmentes an der Stelle λ_s (der sogenannten „effektiven Wellenlänge" oder „Filterfarbe") des benutzten monochromatischen Filters in technisch einfacher Weise und mit durchaus hinreichender Genauigkeit bestimmen. Nach diesem auf Detlefsen[1]) zurückgehenden Grundgedanken hat Ostwald sein Farbenmeßverfahren gestaltet, das für jedes Pigment je eine Messung im A. G. und R. G., im allgemeinen also zwei, und nur bei den Purpurtönen, welche als Mittelfehlpigmente zwei R. G. besitzen, drei derartige Remissionsbestimmungen vorsieht.

Nun sind jedoch streng monochromatische Filter nicht nur sehr schwierig herzustellen, sondern sie würden praktisch für Meßzwecke kaum in Frage kommen, da durch sie betrachtet auch die hellsten Pigmente außerordentlich dunkel erscheinen würden. Man muß also Filter

1) Über die Wahl dieser Grundfarben, siehe Schaefer und Pese, l. c., I. 3.

2) Cl. Schaefer, Physik. Zeitschr. 27, 352 ff., 1926.

3) Cl. Schaefer, l. c.

1) E. Detlefsen. Verfahren zur Feststellung der Farbenwerte, 1904.

von einer merklichen Breite des Durchlassungsgebietes benutzen, wodurch sich in zweierlei Hinsicht eine Abweichung vom oben betrachteten idealen Falle ergibt.

Wenn $D(\lambda)$ die Durchlässigkeitsfunktion des Filters, $P(\lambda)$ die Remissionsfunktion des zu messenden Pigmentes und $R(\lambda)$ bzw. $G(\lambda)$ bzw. $B(\lambda)$ die Grundempfindungsfunktionen bezeichnen, so erscheint das durch das Filter betrachtete Pigment bei normalem Tageslicht in einer Farbe, welche durch folgenden Gehalt an den drei Grundempfindungen R', G' und B' bestimmt wird:

$$R' = \int_{\lambda_0=390}^{\lambda_1=750} P(\lambda)\, D(\lambda)\, R(\lambda)\, d\lambda\,,$$

$$G' = \int_{\lambda_0}^{\lambda_1} P(\lambda)\, D(\lambda)\, G(\lambda)\, d\lambda\,,$$

$$B' = \int_{\lambda_0}^{\lambda_1} P(\lambda)\, D(\lambda)\, B(\lambda)\, d\lambda\,.$$

Da das Vergleichsgrau neutral, seine Remission also innerhalb des sichtbaren Spektrums konstant ist — sie habe den Wert k —, so erscheint das in gleicher Weise beleuchtete Vergleichsgrau bei Betrachtung durch das Filter in einer durch folgende Werte gekennzeichneten Farbe:

$$R'' = k\int_{\lambda_0=390}^{\lambda_1=750} D(\lambda)\, R(\lambda)\, d\lambda$$

$$G'' = k\int_{\lambda_0}^{\lambda_1} D(\lambda)\, G(\lambda)\, d\lambda$$

$$B'' = k\int_{\lambda_0}^{\lambda_1} D(\lambda)\, B(\lambda)\, d\lambda$$

Es zeigt sich demnach, daß bei Filtern mit endlichen Durchlässigkeitsbereichen Buntpigment und Vergleichsgrau im allgemeinen nicht mehr in derselben Farbe erscheinen. Dieser Unterschied hängt davon ab, wie stark sich die Remission des Pigmentes innerhalb der Breite des Durchlässigkeitsgebietes ändert; er kann also gewissermaßen zufällig verschwinden, nämlich dann, wenn gerade innerhalb dieses Bereiches die Remissionskurve parallel zur Abszisse verläuft. Wenn auch bei Zugrundelegung der Ostwaldschen Pigmente mit ihren meist flachen Remissionskurven in manchen anderen Fällen sich nur geringfügige Farbenunterschiede zeigen können, welche die Messung wenig erschweren, so ist doch grundsätzlich festzustellen: Abgesehen von dem genannten Sonderfalle erfordert die Filtermessung einen Helligkeitsvergleich zweier verschiedener Farben, also heterochromatische Photometrie, deren Schwierigkeiten und Nachteile hier nicht erörtert werden sollen[1]). Jedenfalls können diese unter weniger günstigen Umständen, als sie sich bei den Ostwaldschen Pigmenten finden, die technischen Vorteile der Filtermessung aufheben oder sogar überwiegen, so daß man diese Art der Messung nicht als allgemein anwendbare Methode ansehen darf.

Die zweite Abweichung, welche die Messung mittels Filters mit endlichem Durchlässigkeitsbereich gegenüber der mit einem streng monochromatischen Filter aufweist, betrifft den Meßwert. Während man bei Benutzung eines monochromatischen Filters die Remission des vorliegenden Pigmentes an der Stelle λ_s — also die Höhe seiner Remissionskurve in diesem Punkte — feststellt, mißt man im anderen Falle einen Mittelwert der Remission innerhalb des Durchlässigkeitsgebietes. Setzt man wieder Tageslicht voraus und bezeichnet die Helligkeitsverteilung im Sonnenspektrum durch $H(\lambda)$, so ergeben sich als die Helligkeit H' bzw. H'' des durch das Filter betrachteten Bunt- bzw. Graupigmentes

$$H' = \int_{\lambda_0}^{\lambda_1} P(\lambda)\, D(\lambda)\, H(\lambda)\, d\lambda$$

und

$$H'' = k\int_{\lambda_0}^{\lambda_1} D(\lambda) H(\lambda)\, d\lambda\,.$$

Da man bei jeder Messung dasjenige Graupigment wählt, bei welchem die beiden Helligkeiten gleich werden, und als Meßergebnis den entsprechenden Wert für k — die Remission des betreffenden Graupigmentes — abliest, so bedeutet k einen Mittelwert aus allen Ordinaten der Remissionskurve des Pigmentes innerhalb des Durchlässigkeitsbereiches des benutzten Filters. Die Art der Mittelung geht aus obigen Gleichungen hervor, da für $H' = H''$:

$$k = \frac{\int_{\lambda_0}^{\lambda_1} P(\lambda)\, D(\lambda)\, H(\lambda)\, d\lambda}{\int_{\lambda_0}^{\lambda_1} D(\lambda) H(\lambda)\, d\lambda} \qquad (1)$$

wird. Betrachtet man wiederum den Sonderfall, daß innerhalb des Filterbereiches die Remission $P(\lambda)$ des Pigmentes einen konstanten Wert h annimmt, so wird

$$k = \frac{h\int_{\lambda_0}^{\lambda_1} D(\lambda) H(\lambda)\, d\lambda}{\int_{\lambda_0}^{\lambda_1} D(\lambda) H(\lambda)\, d\lambda} = h, \qquad (2)$$

1) Grundsätzliches hierzu bei: Cl. Schaefer, Zur heterochromatischen Photometrie, Physik. Zeitschr. **26**, 58—64 und 908—913, 1925.

ergibt also dann — wie leicht einzusehen ist — die wirkliche Höhe des wagerechten Stücks der Remissionskurve. Zur Ausführung seiner Messungen benutzt Ostwald 7 verschiedene Filter, von denen sowohl die Filter Nr. 2 und 2a als auch die Filter Nr. 3 und 3a ihrer effektiven Wellenlänge nach dicht nebeneinander liegen, so daß im ganzen 5 über das sichtbare Spektrum in größeren Abständen verteilte Meßgebiete vorhanden sind. Von den Filtern wird zur Messung im A. G. immer das benutzt, welches den kleinsten, zur Messung im R. G. dasjenige, welches den größten Wert für k liefert. Da nach Ostwald der im A. G. gemessene k-Wert den Weißgehalt, der im R. G. bestimmte und von 1 abgezogene k-Wert den Schwarzgehalt ergibt, so wird beim Vorliegen verschiedener Meßwerte immer der kleinste Weiß- bzw. Schwarzwert gewählt. Trotzdem kann man infolge der wenigen diskreten Meßstellen nur in Annäherung von einer Messung des Minimums und des Maximums der Remission eines Pigmentes sprechen. Nimmt man das, was über die Mittelwertbildung von k gesagt wurde, hinzu, so geht hieraus hervor, daß die Filtermessung höchstens zufällig einmal genau stimmende Werte für die Remission an der „hellsten" und an der „dunkelsten" Stelle einer Remissionskurve ergeben kann, auf welche es Ostwald zur Bestimmung seines Schwarz- und seines Weißgehaltes gerade ankommt.

7. Korrektionen.

Ungeachtet dessen wurde auch in unserer früheren Veröffentlichung[1]) der Ostwaldsche Weißgehalt W_0'' gleich dem Minimum und der Schwarzgehalt S_0'' gleich dem von 1 subtrahierten Maximum gesetzt. Es bleibt dann noch zu untersuchen, wieweit die unter dieser Voraussetzung dort abgeleiteten Gleichungen (5) und (12) über die Beziehungen zwischen Ostwaldschem Weiß- bzw. Schwarzgehalt und exaktem Weißgehalt bzw. Helligkeit auch dann noch ihre Gültigkeit behalten, wenn für W_0'' und S_0'' ihre tatsächlichen Bedeutungen[2]) eingesetzt werden, wie sie sich aus obigen Betrachtungen ergeben. Zur besseren Übersicht soll im folgenden zwischen angenäherten und genauen Werten derart unterschieden werden, daß die gleichen Buchstaben einmal in deutscher und ein andermal in lateinischer Schrift gesetzt werden. So bedeutet beispielsweise W_0'' den genauen Wert des Minimums der Remissionskurve K'', während $\mathfrak{W}_0'$ den angenäherten Ostwaldschen Weißgehalt der gleichen Kurve darstellt.

Um den Ansatz für die Korrektion zu bestimmen, greift man vorteilhaft auf Fig. 6 unserer oben erwähnten Veröffentlichung[1]) zurück. Während das Minimum W_0 der gestrichelten Grundkurve K definitionsgemäß gleich o ist, würde im allgemeinen das Ostwaldsche Meßverfahren auch für diese idealisierte Kurve als Meßwert im Absorptionsgebiet einen Wert ergeben, welcher größer als o ist und mit $\mathfrak{W}_0$ bezeichnet werde. Auf Grund der in II, 6 abgeleiteten Gleichung (1), in welcher wir den Remissionswert des „gleich hellen" Grauplättchens allgemein „k" genannt hatten, müßte sich als Ostwaldscher Filterwert im Absorptionsgebiete ergeben:

$$\mathfrak{W}_0 = \frac{\int_{\lambda_0}^{\lambda_1} P(\lambda)\, D(\lambda)\, H(\lambda)\, d\lambda}{\int_{\lambda_0}^{\lambda_1} D(\lambda)\, H(\lambda)\, d\lambda}$$

Führt man eine solche Messung im Absorptionsgebiete der von der Grundkurve ableitbaren Kurve K' wirklich aus, so erhält man einen Wert $\mathfrak{W}_0'$, den man auf folgende Weise berechnen kann:

Die Ordinaten der Kurve K' kann man durch die im Abstand W_0' zur Abszisse AB gezogene Parallele CD in zwei Stücke zerlegen, nämlich in ein Stück von konstant bleibendem Werte W_0' und in ein variables Stück $O'(\lambda)$, dessen Größe zwischen O und K_0' schwankt. Entsprechend zerfällt der Wert von $\mathfrak{W}_0$ in zwei Teile, für welche die Filtermessung ergibt:

$$\mathfrak{W}_0' = \frac{W_0' \int_{\lambda 0}^{\lambda 1} D(\lambda)\, H(\lambda)\, d\lambda}{\int_{\lambda 0}^{\lambda 1} D(\lambda)\, H(\lambda)\, d\lambda} + \frac{\int_{\lambda_0}^{\lambda_1} O'(\lambda)\, D(\lambda)\, H(\lambda)\, d\lambda}{\int_{\lambda_0}^{\lambda_1} D(\lambda)\, H(\lambda)\, d\lambda}$$

$$\mathfrak{W}_0' = W_0' + \frac{\int_{\lambda_0}^{\lambda_1} O'(\lambda)\, D(\lambda)\, H(\lambda)\, d\lambda}{\int_{\lambda_0}^{\lambda_1} D(\lambda)\, H(\lambda)\, d\lambda}$$

Wenn man die Kurve K' auf CD als Abszisse bezieht, so läßt sich ihre Remissionsfunktion $O'(\lambda)$ sehr einfach aus der Remissionsfunktion

1) Schaefer und Pese, l. c., III, 14 und 15.

2) Entsprechend dem in II, 6 dargelegten Umstande, daß die Ostwaldschen Filterwerte 1. Durchschnittswerte darstellen und 2. im allg. nicht genau an den Stellen der Maxima bzw. Minima der Remissionskurven gemessen sind.

1) Schaefer und Pese, l. c., p. 733.

$P(\lambda)$ der Grundkurve K durch Multiplikation mit dem „Reinheitsgrade" R' berechnen; demnach wird $O'(\lambda) = R' P(\lambda)$ und

$$\mathfrak{W}_0' = W_0' + \frac{R' \int_{\lambda_0}^{\lambda_1} P(\lambda)\, D(\lambda)\, H(\lambda)\, d\lambda}{\int_{\lambda_0}^{\lambda_1} D(\lambda)\, H(\lambda)\, d\lambda}$$

$$\mathfrak{W}_0' = W_0' + R' \mathfrak{W}_0$$

oder:

$$W_0' = \mathfrak{W}_0' - R' \mathfrak{W}_0, \tag{3}$$

d. h. der genaue Minimumwert W_0' der Kurve K' ist um den Betrag $R' \mathfrak{W}_0$ kleiner als der Filtermeßwert $\mathfrak{W}_0'$.

Nennt man $\mathfrak{S}_0$ den Betrag, um welchen der Filtermeßwert im Remissionsgebiet der Grundkurve K kleiner ist als das wirkliche Maximum $1 - S_0 = 1$, so erhält man durch analoge Rechnung die Gleichung

$$S_0' = \mathfrak{S}_0' - R' \mathfrak{S}_0, \tag{4}$$

aus welcher hervorgeht, um wieviel der Filtermeßwert $(1 - \mathfrak{S}_0')$ zu erhöhen ist, um den genauen Maximumwert $(1 - S_0')$ zu ergeben. Aus beiden Gleichungen kann die Beziehung zwischen dem genauen Reinheitsgrade R' und dem angenäherten $\mathfrak{R}'$ bestimmt werden, da

$$R' = 1 - (W_0' + S_0')$$
$$= 1 - \mathfrak{W}_0' + R' \mathfrak{W}_0 - \mathfrak{S}_0' + R' \mathfrak{S}_0,$$

so folgt:

$$R' = \{1 - (\mathfrak{W}_0' + \mathfrak{S}_0')\} + R' (\mathfrak{W}_0 + \mathfrak{S}_0),$$

oder:

$$R' \{1 - (\mathfrak{W}_0 + \mathfrak{S}_0)\} = \{1 - (\mathfrak{W}_0' + \mathfrak{S}_0')\}$$

d. h.

$$R' \mathfrak{R} = \mathfrak{R}'$$

und daher:

$$R' = \frac{\mathfrak{R}'}{\mathfrak{R}} \tag{5}$$

Wenn man mit c' den exakten Weißgehalt der Kurve K' bezeichnet, so stelle $\Delta \mathfrak{W}' = c' - \mathfrak{W}_0'$ bzw. $\Delta W' = c' - W_0'$ den „Fehler" dar, um welchen der Filterwert $\mathfrak{W}_0'$ bzw. der genaue Minimumwert W_0' vom exakten Weißwert abweicht. Hieraus und aus Gleichung (3) folgt:

$$\Delta W' = c' - \mathfrak{W}_0' + R' \mathfrak{W}_0$$

oder:

$$\underline{\Delta W' = \Delta \mathfrak{W}' + R' \mathfrak{W}_0}. \tag{6}$$

Ganz entsprechend erhält man für $\Delta S'$:

$$\Delta S' = S' - S_0' = S' - \mathfrak{S}_0' + R' \mathfrak{S}_0,$$

d. h.

$$\underline{\Delta S' = \Delta \mathfrak{S}' + R' \mathfrak{S}_0}. \tag{7}$$

Die Gleichung $\Delta W' = R' c'$[1]) in Gleichung (6) und die Gleichung $\Delta S' = R' S_{\text{exakt}}$[1]) in Gleichung (7) eingesetzt ergeben:

$$\underline{\Delta \mathfrak{W}'} = R' c - R' \mathfrak{W}_0 = R' (c - \mathfrak{W}_0) = \underline{R' C_1} \tag{8}$$

bzw.

$$\underline{\Delta \mathfrak{S}'} = R' S_{\text{exakt}} - R' \mathfrak{S}_0 = R' (S_{\text{exakt}} - \mathfrak{S}_0) = \underline{R' C_2}. \tag{9}$$

Da $C_1 = (c - \mathfrak{W}_0)$ und $C_2 = (S_{\text{exakt}} - \mathfrak{S}_0)$ ebenso wie c und S_{exakt} Größen sind, deren Wert lediglich von der Form der Grundkurve K abhängt, so sind damit die Gleichungen für $\Delta \mathfrak{W}'$ und $\Delta \mathfrak{S}'$ auf dieselbe Form gebracht wie die Gleichungen $\Delta W' = R' c$ und $\Delta S' = R' S_{\text{exakt}}$[1]), von denen sie sich nur durch die etwas abgeänderten Formen der Proportionalitätskonstanten unterscheiden. Das heißt, die früher abgeleiteten Ergebnisse bleiben grundsätzlich auch dann richtig, wenn anstatt der genauen Werte W_0' für das Minimum und S_0' für das von 1 abgezogene Maximum einer beliebigen Kurve K' die nur angenähert richtigen Filtermeßwerte $\mathfrak{W}_0'$ und $\mathfrak{S}_0'$ eingesetzt werden: Die von Ostwald angegebenen Werte, sowohl für den Weiß-, wie auch für den Schwarzgehalt sind zu klein; die Fehler $\Delta \mathfrak{W}'$ bzw. $\Delta \mathfrak{S}'$, um welche die exakt bestimmten Weiß- bzw. Schwarzwerte größer sind, hängen bei gegebenem Reinheitsgrade von der Form der Remissionskurve — also vom Farbtone — ab, bei gegebenem Farbtone sind sie proportional dem Ostwaldschen Reinheitsgrade.

Als weiteres Ergebnis zeigt sich, daß eine Umrechnung der Ostwaldschen Komponenten in exakte Werte möglich ist, wenn man die Proportionalitätskonstanten c und S_{exakt} in den Gleichungen für $\Delta W'$ und $\Delta S'$ bzw. C_1 und C_2 in den Gleichungen (8) und (9) berechnen kann.

Die beiden ersten Gleichungen sind dann anzuwenden, wenn die tatsächlichen Werte für Maximum und Minimum der betreffenden Remissionskurve, die Gleichungen (8) und (9), wenn man nur die durch Filtermessung gewonnenen Näherungswerte $\mathfrak{W}_0'$ und $\mathfrak{S}_0'$ kennt, zu welchen bekanntlich auch die den Pigmenten des Ostwaldschen Farbenatlasses aufgedruckten Angaben über Weiß- und Schwarzgehalt gehören.

Zur Berechnung der Proportionalitätskonstanten braucht man — wie im folgenden näher begründet werden soll — die exakte Messung eines einzigen Farbkreises, um dann für alle Pigmente des Farbatlasses die exakten Werte aus ihren Kennziffern bestimmen zu können. Um den quantitativen Zusammenhang zwischen

[1]) Schaefer und Pese, l. c., Gleichungen (5) und (12)

den Ostwaldschen Komponenten und den exakten Werten für Weißgehalt und Helligkeit zu zeigen und gleichzeitig ein Beispiel für die Durchrechnung der vorliegenden Aufgabe zu geben, wurde wiederum auf die exakten Messungen von Kohlrausch zurückgegriffen. Da diese Messungen — wie schon in I, 3 erwähnt — an und für sich zuverlässig sind, sich aber auf ein Vergleichsweiß von nicht genau bekannter Albedo beziehen, so können den Remissionskurven keine absolut genauen Werte für Maximum und Minimum entnommen werden. Es werden daher in der folgenden Rechnung anstatt der absolut genauen Werte W'_0 und S'_0 die Ostwaldschen Filterwerte $\mathfrak{W}'_0$ und $\mathfrak{S}'_0$ eingesetzt. Damit wird für die hier als Beispiel durchgeführte Berechnung der Differenzen zwischen Ostwaldschen Angaben und exakten Werten zwar nur eine erste Annäherung erreicht — nach den Gleichungen (6) und (7) ist der genaue Fehler $\Delta W'$ um den Korrektionswert $K'\mathfrak{W}_0$ größer, der genaue Fehler $\Delta S'$ um den Korrektionswert $K'\mathfrak{S}_0$ größer als berechnet wird —, der Sinn der Rechnung bleibt jedoch grundsätzlich erhalten, zumal mit abnehmender Reinheit K' die Korrektionswerte $(C_1 - c)$ und $(C_2 - S_{\text{exakt}})$ proportional mit K' kleiner werden und die Güte der Annäherung infolgedessen mit $(1 : K')^2$ wächst.

8. Numerische Berechnung: Weißgehalt.

Während bisher die Gestalt der Remissionskurve K eines Pigmentes vom Reinheitsgrade $R = 1$ und damit auch sein exakter Grundfarbengehalt a, b und c als bekannt vorausgesetzt werden durfte, soll jetzt zur genaueren Ausdeutung der Gleichung $\Delta W' = K'c$ der Faktor c (prozentualer Gehalt von am wenigsten vorhandener Grundfarbe) für einige Farbtöne bestimmt werden.

Ein Farbaufstrich mit der Remissionskurve K (s. Fig. 6 unserer früheren Veröffentlichung) ist praktisch nicht herstellbar. Trotzdem kommt der Kurve K eine reale Bedeutung durch folgende Überlegung zu: Ein in einer farblosen Flüssigkeit gelöster Farbstoff ergibt bei Aufstrichen auf weißen Untergrund einen bestimmten Farbton[1]), welcher auch durch Verdünnung der Aufstrichfarbe oder durch Zumischung eines neutralweißen oder neutral-schwarzen Pigmentes nicht verändert wird. Dagegen wird in diesen Fällen der Weiß- oder Schwarzgehalt des Aufstriches abgewandelt. Die verschiedenen Aufstriche verschiedener Sättigung und Helligkeit, aber gleichen Farbtones haben die Remissionskurven K'', K''', K'''' usw., die jedoch alle in der früher beschriebenen Weise aus derselben Kurve K entwickelt werden können.

Werden also die verschiedenen Sättigungen und Helligkeiten eines bestimmten Farbtones in der genannten Weise mittels ein und desselben Farbstoffes hergestellt, so läßt sich umgekehrt aus einer beliebigen Kurve K'' die für alle Kurven K'', K'''' usw. gültige Grundkurve K ermitteln. In Gleichung (3) unserer früheren Veröffentlichung ist $K'c + W'_0 = c'$ gesetzt; hieraus folgt

$$c = \frac{1}{K'}(c' - W'_0).$$

Die K''-Kurven werden dem von Kohlrausch exakt gemessenen Farbkreise nc entnommen; die in untenstehender Tabelle I eingetragenen Werte für c' stammen von Kohlrausch, die für W'_0 und S'_0 bzw. K' von Ostwald.

Tabelle I.

Die Werte für c', W'_0, S'_0 und c sind in Proz. angegeben.

Farbton	c'	W'_0	S'_0	$\frac{c' - W'_0}{K'} = c$
0	12,3	7	42	5,3 : 0,51 = 10,4
13	10,5	7	40	3,5 : 0,53 = 6,6
25	21,7	7	42	14,7 : 0,51 = 28,8
38	16,2	7	46	9,2 : 0,47 = 19,6
50	12,9	7	48	5,9 : 0,45 = 13,1
63	23,0	7	42	16,0 : 0,51 = 31,4
75	22,2	7	50	15,2 : 0,43 = 35,3
88	15,3	7	50	8,3 : 0,43 = 19,3

[1]) Im Helmholtzschen Farbendreieck (s. Fig. 1 unsrer früheren Veröffentlichung) schneidet die durch den Ort der reellen Farbe F und den Weißpunkt W gelegte Gerade die Spektralkurve in S; die durch diesen Schnittpunkt bestimmte Spektralfarbe soll die „zugehörige Spektralfarbe" S der Farbe F genannt werden. Definitionsgemäß hat jede reelle Farbe den gleichen bzw. den komplementären Farbton, wie die zugehörige Spektralfarbe. Trotzdem erscheinen in manchen Fällen — wie schon früher erwähnt — reelle Farbe und zugehörige Spektralfarbe in verschiedenem Farbtone. Über diese bemerkenswerte Tatsache liegen bisher keine systematischen experimentellen Untersuchungen vor. (Über einen theoretischen Deutungsversuch s. E. Schrödinger, „Die Gesichtsempfindungen", l. c., §§ 62 und 63.) Wir wissen lediglich, daß die Farbtonänderung nicht durch irgendeine sie erklärende Änderung der Remissionskurve hervorgerufen wird, also nicht physikalischen, sondern physiologischen oder psychologischen Ursprungs ist.

Es ist daher gerechtfertigt, wenn Ostwald allen Aufstrichen desselben Farbstoffes, aber von verschiedener Sättigung ohne Rücksicht auf die erwähnte Erscheinung ein und dieselbe Farbtonnummer zuordnet. Dementsprechend wird auch die obige Überlegung nicht durch diese Farbtonänderung berührt.

Die Tabelle I und die graphische Darstellung in Fig. 8 geben die Abhängigkeit des Fehlers

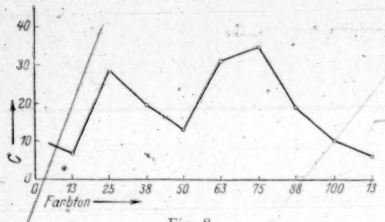


Fig. 8.

$\Delta W' = R' c$ bei vorgegebenem Ostwaldschen Reinheitsgrade vom Farbtone an, und zwar ist der Fehler:

klein im rötlichen Gelb (Farbton 13),
mittelgroß im Gelb (Farbton 100),
mittelgroß im Blau (Farbton 50),
groß im Rot (Farbton 25),
groß im Grün (Farbton 63—88).

Die Gleichung $W'_{\text{exakt}} = 3\,(R' c + W'_0)$ [1]) enthält eine abhängige und drei unabhängige Variable. Wollte man sie in einem zweiachsigen Koordinatensystem darstellen, so hätte man zwei Variable als Parameter zu wählen. Das ergibt 6 Kombinations- und damit Darstellungsmöglichkeiten. In jedes System aber müßte man eine größere Anzahl von Kurvenscharen einzeichnen. (Wählt man z. B. Farbton und Sättigung als Parameter, so müßte man bei 8 verschiedenen Farbtönen und 5 verschiedenen Reinheitsgraden bereits $8 \times 5 = 40$ Kurven in dasselbe Koordinatensystem zeichnen oder aber 8 Systeme mit

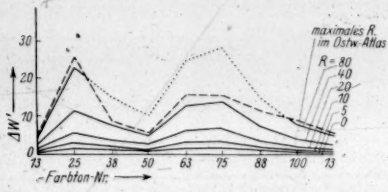


Fig. 9.

je 5 Kurven usw.) Vorteilhafterweise wird daher die obenstehende Gleichung in zwei Gleichungen zerlegt:

$$\Delta W' = R' c \quad \text{und} \quad W'_{\text{exakt}} = 3\,(\Delta W' + W'_0),$$

denen zwei graphische Darstellungen entsprechen. Aus dem 1. System ist $\Delta W'$ zu bestimmen und damit in das zweite System einzugehen, um W'_{exakt} zu erhalten.

1) Schaefer u. Pese, l. c. Gleichung (3) auf p. 734.

In Fig. 9 entspricht die Abszisse dem Werte $R' = 0$; wird $R' = 1$, so ist die Kurve identisch mit der Kurve für c (Fig. 8); die Kurven $R' = 20$ und $R' = 40$ teilen den Ostwaldschen Atlas in drei angenähert gleiche Teile hinsichtlich der Ostwaldschen Sättigung (unter Berücksichtigung der logarithmischen Teilung des Ostwaldschen Farbdreiecks).

Die Werte für Fig. 9 sind der Tabelle II zu entnehmen:

Tabelle II.

Farbton	0	13	25	38	50	63	75	88
$\Delta W'$ bei $R_{\max}$	9,2	5,9	25,6	9,2	5,9	16	15,9	11,8
„ $R' = 5$	0,5	0,3	1,4	1,0	0,7	1,6	1,8	1,0
„ $R' = 10$	1	0,7	2,9	2,0	1,3	3,1	3,5	1,9
„ $R' = 20$	2,1	1,3	5,8	3,9	2,6	6,3	7,1	3,9
„ $R' = 40$	4,2	2,6	11,5	7,8	5,2	12,6	14,1	7,7
„ $R' = 80$	8,3	5,3	23,1	15,7	10,5	25,1	28,3	15,5

In der folgenden Tabelle III sind die Farben zusammengestellt, welche unter den Pigmenten des Ostwaldschen Farbatlasses den größten Reinheitsgrad besitzen.

Tabelle III.

Farbton	0	13	25	38	50	63	75	88
Farbkreis	*pa*	*pa*	*pa*	*nc*	*nc*	*nc*	*oc*	*pa*
W'_0; S'_0	4; 8	4; 7	4; 7	7; 46	7; 48	7; 42	5; 50	4; 35
R'	88	89	89	47	45	51	45	61

9. Numerische Berechnung: Helligkeit.

Die Berechnung von S_{exakt} der idealisierten Kurve K ist Voraussetzung für die zahlenmäßige

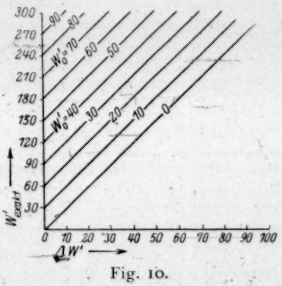


Fig. 10.

Zuordnung des Ostwaldschen Schwarzgehaltes S'_0 zu einer exakten Helligkeitsgröße. Nach Gleichung (11) unserer früheren Veröffentlichung ist: $S'_{\text{exakt}} = R' S_{\text{exakt}} + S'_0$. Hieraus folgt:

$$S_{\text{exakt}} = \frac{1}{R'}\,(S'_{\text{exakt}} - S'_0).$$

Tabelle IV.

Farbton	o	13	25	38	50	63	75	88
Rot	48,2	50,2	37,1	22,9	13,8	23,0	22,2	26,7
Grün	52,0	38,1	27,5	16,2	12,9	27,5	28,5	34,2
Blau	12,3	10,5	21,7	35,5	48,9	53,0	34,4	15,3
$\varrho \cdot$ Rot	27,1	28,2	20,8	12,9	7,75	12,9	12,5	15,0
$\gamma \cdot$ Grün	22,1	16,2	11,7	6,9	5,5	11,7	12,1	14,5
$\beta \cdot$ Blau	0,2	0,2	0,3	0,5	0,7	0,7	0,5	0,2
$H'_R = \varrho \cdot R + \gamma \cdot G + \beta \cdot B$	49,4	44,6	32,8	20,3	13,9	25,3	25,1	29,7
$S'_{\text{exakt}} = 100 - H'_R$	50,6	55,4	67,2	79,7	86,1	74,7	74,9	70,3
S'_0	42	40	42	46	48	42	50	50
100	100	100	100	100	100	100	100	100
R'	51	53	51	47	45	51	43	43
$S'_{\text{exakt}} - S'_0$	8,6	15,4	25,2	33,7	38,1	32,7	24,9	20,3
$S_{\text{exakt}} = \frac{100}{R'}(S'_{\text{exakt}} - S'_0)$	16,9	29,1	49,4	71,7	84,8	64,1	58	47,7

Alle Werte der Tabelle IV sind in Prozentzahlen angegeben.

Die Werte S', S'_0 und R' werden dem von Kohlrausch exakt gemessenen Farbkreise *ac* des Ostwaldschen Atlas entnommen. Während S'_0 und R' unmittelbar aus den Ostwaldschen Angaben zu entnehmen ist, folgt nach den Gleichungen (7) und (10) unserer oben erwähnten Veröffentlichung für

$$S'_{\text{exakt}} = 1 - H'_R = 1 - (\alpha a' + \beta b' + \gamma c'),$$

worin a', b', c' die Grunderregungen nach den erwähnten Messungen von Kohlrausch, jedoch α, β und γ die bezüglichen Koeffizienten der spezifischen Helligkeiten nach den Messungen von Exner bezeichnen.

In Tabelle IV und der ihr entsprechenden graphischen Darstellung (Fig. 11) sind alle Werte in Prozentzahlen ausgedrückt. Wurden bisher die Grunderregungen durch die Symbole a, b, c dargestellt (wobei es grundsätzlich gleich war, ob beispielsweise „a" die rote, grüne oder blaue Erregung bezeichnete), so ist bei Berechnung der Helligkeit die bisherige Bezeichnungsweise der drei Grunderregungen nicht mehr zulässig; sie sollen durch „rot", „grün", „blau" mit den bez. Helligkeitskoeffizienten ϱ, γ, β ausgedrückt werden, wobei die Koeffizienten die Werte

$$\varrho = 0{,}56_1; \quad \gamma = 0{,}42_5; \quad \beta = 0{,}01_4$$

besitzen.

Die Fig. 11 stellt die Verteilung der Helligkeitsabsorption S_{exakt} und der Helligkeitsremission H_R in einem idealisierten Farbkreise dar, dessen $W_0 = S_0 = 0$ ist; gleichzeitig zeigt sie die Abhängigkeit des Fehlers in der Ostwaldschen Schwarzmessung vom Farbtone bei konstanter Ostwaldscher Reinheit.

Für die graphische Darstellung und Berechnung der exakten Größe H'_R gelten dieselben Überlegungen wie für den exakten Weißgehalt. Es wird also die hier maßgebende Gleichung (11)

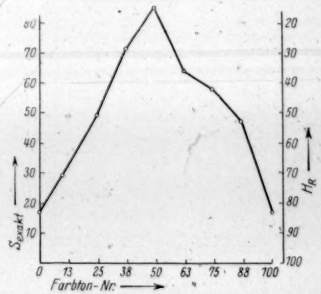


Fig. 11.

unserer früheren Veröffentlichung, ebenfalls in zwei Funktionen zerlegt, folgendermaßen geschrieben:

$$1 - H'_R = S'_{\text{exakt}} = \Delta S' + S'_0,$$

wobei

$$\Delta S' = R' S_{\text{exakt}} \text{ ist.}$$

Die Werte für die maximalen im Ostwaldschen Atlas vorkommenden Werte von R' (also für die nach Ostwalds Definition in ihm vorkommenden gesättigsten Farben) sind der Tabelle III entnommen.

Tabelle V.

Farbton	0	13	25	38	50	63	75	88
S bei $R_{max.}$	14,9	25,9	44,0	33,6	38,1	33,7	26,1	28,8
S „ $R' = 5$	0,8	1,5	2,5	3,6	4,2	3,2	2,9	2,4
S „ $R' = 10$	1,7	2,9	4,9	7,2	8,5	6,4	5,8	4,7
S „ $R' = 20$	3,4	5,8	9,9	14,3	16,9	12,8	11,6	9,4
S „ $R' = 40$	6,8	11,6	19,7	28,7	33,9	25,6	23,2	18,9
S „ $R' = 80$	13,5	13,3	39,5	57,4	67,8	51,2	46,4	37,8

Das angegebene Umrechnungsverfahren kann als mittelbare Bestätigung des direkten Schaeferschen Beweises[1]) gelten, daß eine allgemein gültige Transformation von Ostwald-Komponenten in Komponenten der exakten Farblehre

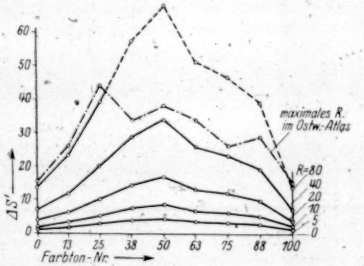


Fig. 12.

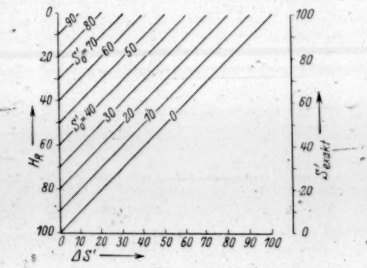


Fig. 13.

unmöglich ist; denn nur durch die dargelegte Berücksichtigung der Form der Remissionskurve — es sei an die Entwicklung des Begriffs „Grundkurve" erinnert — wird die Umrechnung erst ermöglicht. Die Form der Remissionskurve muß gleichsam als weitere Bedingung zu den drei Ostwaldschen Bestimmungsstücken hinzutreten. Hieran würde sich auch dann nichts ändern, wenn die Remission der Pigmente in Wirklichkeit so erfolgte, wie sie die schematisierten rechteckigen Kurvenzüge Ostwalds zeigen. Da in Anbetracht der Dreidimensionalität des Farbenraumes jede Farbe durch drei geeignet gewählte Bestimmungsstücke ohne Hinzunahme irgendwelcher Bedingungen eindeutig bestimmbar ist, so bestätigt es sich abermals, daß die Definition der Ostwaldschen Komponenten „Weißgehalt" und „Schwarzgehalt" ungünstig ist.

Weiterhin kann diese Umrechnung als besondere Vereinfachung zur Bestimmung der exakten Komponenten bei solchen Untersuchungen dienen, bei denen es sich um die genaue Messung mehrerer Pigmente verschiedener Helligkeit und verschiedener Sättigung, aber gleichen Farbtones handelt, sofern nur zu ihrer Einfärbung ein und derselbe Farbstoff gedient hat. Da man in diesem Falle lediglich die Aufnahme einer einzigen Remissionskurve — etwa des gesättigsten Pigmentes — und ihre in bekannter Weise erfolgende Umrechnung in exakte Werte braucht, aus welchen ohne weiteres die Proportionalitätskonstante für $\Delta W'$ und $\Delta S'$ folgt, so hat man für alle sogenannten „Abwandlungen" des gemessenen Pigmentes nur die Messung an zwei Stellen ihrer Remissionskurve — Maximum und Minimum — vorzunehmen, welche zusammen mit $\Delta W'$ und $\Delta S'$ ohne weitere Umrechnung die exakten Werte für Weißgehalt und Helligkeit liefern.

(Eingegangen 15. August 1930.)

Über den direkten Zusammenhang von Zustandsgleichung und innerer Reibung.

Von Léon Schames.

Von einiger Zeit habe ich die innere Reibung berechnet[1]) unter der Voraussetzung I, daß zwischen zwei Gasmolekülen ein Potential besteht:

$$\Phi = -\frac{A}{r^m} + \frac{B}{r^n} \qquad (1)$$

Nach der klassischen Theorie folgt hieraus eine Temperaturabhängigkeit des mittleren Durchmessers s

$$\boxed{\frac{n-m}{n}\left(\frac{s_0}{s}\right)^m + \frac{m}{n}\left(\frac{s_0}{s}\right)^n = \frac{T}{T_0}} \qquad (2)$$

wobei s_0 der Durchmesser für $T = \infty$ und

$$T_0 = \frac{A}{k s_0^m}.$$

1) L. Schames, Physik. Zeitschr. **29**, 91, 1928.

1) Cl. Schaefer, Über den sogenannten Schwarz- und Weißgehalt von Pigmenten in der Ostwaldschen Farbensystematik. Physik. Zeitschr. **27**, 347—353, 1926.

Wenn man in erster Annäherung[1]) Voraussetzung II macht, daß sich die Moleküle beim Stoß ebenso verhalten wie vollkommen elastische, vollkommen harte Kugeln ohne Kraftfeld, deren mittlere Durchmesser nun aber nicht konstant sind, sondern mit wachsender Temperatur abnehmen, so wird[2]) die innere Reibung η

$$\eta = \frac{1}{\pi s^2 N}\sqrt{\frac{RTM}{\pi}}. \qquad (3)$$

Unter der gleichen Voraussetzung II wird die Größe b der van der Waalsschen Zustandsgleichung

$$pv = RT\left\{1 + \varphi_1\frac{b}{v} + \varphi_2\left(\frac{b}{v}\right)^2 + \cdots\right\} - \frac{a}{v} \qquad (4)$$

temperaturabhängig und zwar tritt sie in direktem Zusammenhang mit η

$$b = \frac{2}{3}\pi N s^3 = \frac{2^{\cdot}(RTM)^{3/4}}{3\,\pi^{3/4}\eta^{3/2}N^{1/2}} \qquad (5)$$

(3) und (5) basieren nur auf Voraussetzung II und sind unabhängig von Voraussetzung I. Für die Größe a finden wir mit Hinzunahme der speziellen Voraussetzung I für die Grenze $T = \infty$

$$a_0 = b_0 R T_0 m \frac{n - m}{(m - 3)(n - 3)} \qquad (6)$$

Mit den früher (loc. cit.) aus der Reibung für He ermittelten Werten von m, n, s_0, T_0 ergibt sich aus (5) und (6) für b_0 und a_0 in auf den kritischen Punkt reduzierten Größen:

$$\mathfrak{b}_0 = 0{,}70$$
$$\mathfrak{a}_0 = 5{,}50.$$

Aus dem II. Virialkoeffizienten und b nach (5) leiten wir — weiter unten — empirisch ab $\mathfrak{a}_0 = 6{,}00$.

In Anbetracht dessen, daß der Potentialansatz (1) heute durch die Entwicklung der Quantenmechanik überholt ist und wir ihn nur mehr als phänomenologisch ansehen dürfen, ist die Übereinstimmung des so gefundenen theoretischen Wertes von $\mathfrak{a}_0$ mit dem empirischen als sehr gut zu bezeichnen. Aus diesem speziellen Potentialansatz sind also die Gleichungen (2) und (6) hergeleitet.

Die Gleichungen (3) und (5) hingegen sind allgemeinerer Natur und wir wollen in folgendem sehen, zu welchen Schlüssen sie uns führen.

1) Wegen weiterer Annäherung vgl. den Schluß.

2) Bei der Ableitung von η ist loc. cit. ein Druckfehler unterlaufen, der hiermit berichtigt sei. Es muß heißen (S. 92, Spalte 2):

$$\eta = \frac{m\bar{c}}{2\sqrt{2}\pi s^2} \quad \text{statt} \quad \eta = \frac{m\bar{c}}{2\sqrt{\pi}s^2}.$$

Aus den empirischen Reibungswerten haben wir b nach (5) berechnet für die Stoffe: He, H_2, Ne, N_2, A, und haben diese Werte als Funktion der reziproken Temperatur aufgetragen. Um die Resultate untereinander vergleichen zu können, haben wir die so erhaltenen Werte auf den kritischen Punkt reduziert. Die hierbei benutzten kritischen Größen sind in Tab. I zusammengestellt.

Tabelle I.

	T_k^0 abs.	p_k Atm	$V_k \frac{\text{cm}^3}{\text{Mol}}$	$\Re$
He	5,19	2,26	57,7	3,27
H_2	33,18	12,75	64,8	3,28
Ne	44,74	26,86	41,4	3,25
N_2	125,96	33,49	88,7	3,42
A	150,65	48,00	75,3	3,42

wobei die „reduzierte Gaskonstante" $\Re = \frac{RT_k}{p_k V_k}$. Die Resultate haben wir graphisch gegeben. In den Fig. 1 und 2 ist die Abszisse $\frac{1}{\Re t}$ und die Ordinate die reduzierte van der Waalsschen

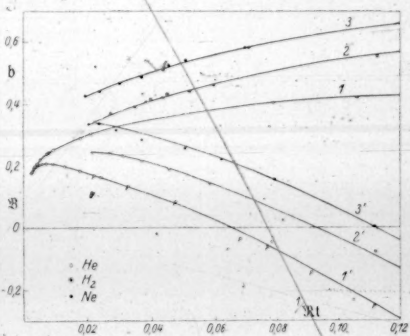


Fig. 1.

Größe $\mathfrak{b}$, bzw. der reduzierte II. Virialkoeffizient $\mathfrak{B}$ der Reihenentwicklung

$$pv = RT\left(1 + \frac{B}{v} + \frac{C}{v^2} + \cdots\right) \qquad (7)$$

$$\mathfrak{B} = \frac{B}{V_k} \qquad (7a)$$

Im oberen Teil der Fig. 1 und 2 stellen die Kurven 1, 2, 3, 4, 5 die Abhängigkeit $\mathfrak{b}$ von der reziproken Temperatur für He, H_2, Ne, N_2, A dar; die einzelnen aus den Messungen der inneren Reibung folgenden Werte sind eingetragen. Im unteren Teile sind die entsprechenden Kurven

für die Abhängigkeit von $\mathfrak{B}$ von der reziproken Temperatur mit 1′, 2′, 3′, 4′ 5′ angegeben; die einzelnen Werte der Physikalisch-Techn. Reichsanstalt, sowie die neuen Leidener Bestimmungen[1]) für *He* (γ) sind eingetragen. Man sieht, daß im

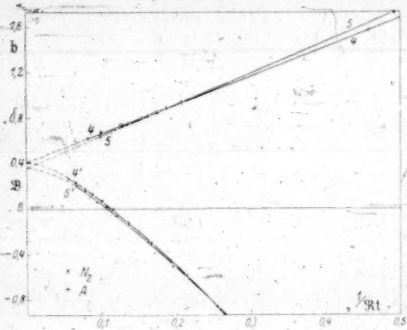


Fig. 2.

allgemeinen die Bestimmungen der inneren Reibung genauer sind, als die des II. Virialkoeffizienten. Wir kommen hierauf am Schluß nochmals zurück.

Alle b-Kurven zeigen denselben Charakter; aus derjenigen des Heliums können wir schließen, daß für $T = \infty$ der Grenzwert für b (und mithin auch für B) Null wird. Dies heißt nichts anderes, als bei der Temperatur ∞ ist der Stoß zweier Moleküle so stark, daß sich die Kerne bis zu Berührung einander nähern (das Kernvolumen ist dabei gegen die Größe b bei gewöhnlicher Temperatur zu vernachlässigen). Für die Grenze $T = 0$ strebt b seinem Maximalwert b_0 asymptotisch zu.

Aus der Fig. 2 folgt empirisch, daß sich b im beobachteten Temperaturbereich linear ändert. Mit anderen Worten gilt demnach für die innere Reibung des N_2 und A im ganzen beobachteten Bereich die empirische Formel und zwar, wie die Figur zeigt, sehr genau:

$$\eta = \frac{K\,T^{1/2}}{\left(1 + \frac{C}{T}\right)^{2/3}}. \qquad (8)$$

Diese Formel ist derjenigen von Sutherland verwandt. Nach Chapman und Enskog sollte letztere nur für hohe Temperaturen gelten; für genügend hohe Temperaturen wird (8) mit der Sutherlandschen Formel identisch. Es ist aber zu bedenken, daß für ganz hohe Temperaturen, wie wir bei Fig. 1 hervorhoben, b (bei Vernachlässigung des Kernvolumens) zum Grenzwert 0 hinstrebt, so daß die geradlinige Extrapolation hierbei nicht statthaft ist; mit anderen Worten heißt das, bei den ganz hohen Temperaturen, bei denen die Abstoßungskräfte bei weitem vorherrschen, wird die Voraussetzung der Sutherlandschen Formel hinfällig, und mithin weder diese Formel, noch die hier gegebene anwendbar. Für mittlere Temperaturen werden diese Formeln jedoch anwendbar; hier ist — wie man aus Fig. 2 ersieht — die hier gegebene Formel (8) bis zu viel tieferen Temperaturen hinab gültig, als diejenige von Sutherland. Für noch tiefere Temperaturen muß dann aber auch (8) versagen, weil, wie wir oben bereits bemerkten, für die Grenze $T = 0$, b seinen Maximalwert b_0 asymptotisch erreicht.

Die beiden Geraden für b, für N_2 und A (4 und 5) fallen fast zusammen. Wenn das Korrespondenzgesetz zwischen diesen beiden Substanzen streng gelten würde, müßten sie ganz zusammenfallen. Obwohl die Abweichungen z. T. nicht viel über der Fehlergrenze liegen, scheinen sie doch durchaus real. Dies wird vor allem dadurch gestützt, daß die ganz analogen Abweichungen auch bei den $\mathfrak{B}$-Kurven (4′ und 5′) auftreten. Die betreffenden Schnittpunkte liegen auch bei annähernd der gleichen reduzierten Temperatur.

Deutlicher als bei den Stoffen der Fig. 2 treten bei denjenigen der Fig. 1 die Abweichungen vom Korrespondenzgesetz zutage. Da aber die kleinen Differenzen zwischen 4 und 5 sehr angenähert denjenigen zwischen 4′ und 5′ gleich sind, und ebenso die beträchtlichen zwischen 2 und 3 und 2′ und 3′ (2 und 3 sind außerdem sehr angenähert einander parallel, ebenso 2′ und 3′), so verschwinden die Abweichungen in $\mathfrak{a}$ der betr. Substanzen. Nach der mit $\varphi_1 = 1$ aus (4) und (7) folgenden Gleichung

$$\mathfrak{a} = \mathfrak{R}t\,(\mathfrak{b} - \mathfrak{B}) \qquad (9)$$

läßt sich nämlich die reduzierte van der Waalssche Größe $\mathfrak{a}$ aus unseren Fig. 1 und 2 entnehmen, indem man die Differenz $\mathfrak{b} - \mathfrak{B}$ durch den betr. Abszissenwert dividiert. Die so erhaltenen Werte von $\mathfrak{a}$ sind in Fig. 3 als Funktion von $\mathfrak{R}t$ eingezeichnet. Für *He* (Kurve 1) bleibt bis $\mathfrak{R}t \sim 57$ (d. h. $T \sim 90^0$ abs.) $\mathfrak{a}$ = konstant $= 6{,}0$[1]); für höhere Temperaturen sinkt es langsam — ungefähr linear — bis ca. 420^0 abs. und bleibt von da an konstant $\sim \frac{\mathfrak{a}_0}{4}$. Für H_2 und *Ne* fallen die Kurven 2 und 3 praktisch zusammen;

1) W. H. Keesom: Proc. Amst. **31**. 952.

1) Auch die Isothermen für sehr tiefe Temperaturen (2,5 — 4,3° abs. nach Leiden Com. Nr. 170b) lassen sich mit diesem Wert von $\mathfrak{a}$ und dem aus der Kurve der Fig. 2, Physik. Zeitschr. **29** S. 93, 1928, folgenden Wert von $\mathfrak{b}$ gut darstellen.

Tabelle III.

Tabelle der Virialkoeffizienten nach der Physikalisch-Technischen Reichsanstalt.

	t	A	$B_1 \cdot 10^3$	$B_2 \cdot 10^3$	$C_1 \cdot 10^6$	$C_2 \cdot 10^6$	$C_3 \cdot 10^6$
	400	2,46244	0,59451	0,60117		0,11711	0,36
	300	2,09665	0,61600	0,61797		0,30733	0,38
	200	1,73091	0,64933	0,64804		0,44050	0,42
	100	1,36518	0,66804	0,67453		0,53306	0,45
	50	1,18223	0,68887	0,68797		0,51689	0,475
	0	0,99930	0,69543	0,69565		0,50594	0,495
He	− 50	0,81642	0,70000		0,163		0,613
	− 100	0,63352	0,69900		0,285		0,670
	− 150	0,45062	0,67000		0,449		0,670
	− 183	0,32992	0,62280		0,735		0,633
	− 208	0,23847	0,55080		2,384		0,880
	− 252,8	0,07460	− 0,16424		18,529		1,407
	− 258	0,05558	− 0,79749		54,370		3,66
	200	1,73066	0,92168	0,91988		0,9245	
	100	1,36506	0,91400	0,9126		0,909	
	50	1,18212	0,89000	0,8887		0,858	
	0	0,99918	0,82094	0,81613	0,3745	1,22	1,05
H_2	− 50	0,81631	0,71000		0,857		1,20
	− 100	0,63344	0,53700		1,551		1,27
	− 150	0,45057	0,17300		3,469		1,59
	− 183	0,32988	− 0,32500		6,600		2,28
	− 207,9	0,23881	− 1,0772		2,4219		1,74
	400	2,46261	0,80600				
	300	2,09680	0,80800				
	200	1,73099	0,76600		0,327		1,153
	100	1,36518	0,69600		0,735		1,487
Ne	0	0,99937	0,62570		0,490		0,881
	− 50	0,81647	0,5350		0,611		0,786
	− 100	0,63356	0,37860		0,857		0,677
	− 150	0,45066	0,00580		2,361		1,06
	− 182,5	0,33177	− 0,4800		3,889		1,51
	− 207,9	0,23885	− 1,2306		1,7693		1,94
	400	2,46558	1,38086	1,37778	0,8082	4,35333	3,90
	300	2,09934	1,21257	1,20721	0,7510	3,48244	3,04
	200	1,73308	0,90133	0,89278	1,5778	4,14725	3,55
	150	1,54996	0,67717	0,66905	2,1389	4,30662	3,35
N_2	100	1,36682	0,36057	0,35060	3,1510	4,98672	4,44
	50	1,18368	− 0,01514	− 0,02107	3,7959	4,74983	4,50
	0	1,08060	− 0,60716	− 0,59899	5,4056	5,26383	5,77
	− 50	0,8 747	− 1,54934		5,7092		7,06
	− 100	0,63434	− 3,04600		− 3,0667		7,33
	− 130	0,52446	− 4,68594		− 24,4699		9,19
	200	1,73317	0,72317	0,70292	1,8167	4,3125	3,65
	150	1,55030	0,50000	0,48676	2,3333	4,4801	3,85
Luft	100	1,36713	0,20933	0,20684	3,1000	4,5054	4,27
	50	1,18397	− 0,18517	− 0,18904	3,7611	4,6310	4,49
	0	1,00080	− 0,79333	− 0,78494	5,2222	5,1918	5,85
	400	2,46736	0,89886				
	300	2,10085	0,65929		0,7959		2,10
	200	1,73433	0,27443	0,27113	1,9309	3,65394	3,42
	150	1,55107	0,06843	0,05859	2,15 0	3,59719	3,34
A	100	1,36782	− 0,25229	− 0,24725	2,7837	3,69055	3,86
	50	1,18456	− 0,64757	− 0,63331	3,1061	3,54108	4,09
	0	1,00130	− 1,29786	− 1,27132	4,1020	0,44681	5,66
	− 50	0,81804	− 2,22100		1,3720		6,05
	− 100	0,63478	− 3,78075		− 17,6813		3,10
	100	1,36782	− 0,20357	− 0,20149	2,2571	3,02964	3,12
O_2	50	1,18456	− 0,63543	− 0,62750	2,7755	3,26394	3,70
	0	1,00130	− 1,30143	− 1,27335	3,6898	4,07229	5,38

ebenso für N_2 und A die Kurven 4 und 5. Für die beiden letzten Substanzen ist der Grenzwert für hohe Temperaturen auf folgendem Wege gefunden worden. Wir haben in Fig. 2 die $\mathfrak{b}$-Kurven geradlinig dünn gestrichelt bis $T = \infty$ extrapoliert, ebenso die $\mathfrak{B}$-Kurven. Wenn auch nach obigem diese Extrapolation für die Werte

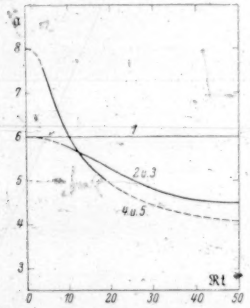


Fig. 3.

selbst nicht erlaubt ist, so darf doch wohl die so erhaltene Differenz $\mathfrak{b} - \mathfrak{B}$ als richtig angesehen werden. Letzterer entspricht der gestrichelte Verlauf der a-Kurve 4 und 5 in Fig. 3 für hohe Temperaturen. Aus der Fig. 3 entnehmen wir, wegen der Extrapolationen nur mit Vorbehalt, folgende Grenzwerte:

Tabelle II.

	a_0	a_∞
He	6,0	1,5
H_2 u. *Ne*	6,0	4,5
N_2 „ *A*	8,0	4,0

Wir haben zu Anfang erwähnt, daß Gleichung (3) bzw. (5) nur als erste Annäherung aufzufassen ist. Das Zusammenstreben der Kurven $\mathfrak{b}$ und $\mathfrak{B}$, die doch aus ganz verschiedenen Erscheinungsgebieten abgeleitet sind, für hohe Temperaturen, wie sie sich vor allem für *He* ergeben hat, spricht dafür, daß diese Näherung mindestens für den II. Virialkoeffizienten ausreicht. Gerne hätten wir unsere Untersuchung auf den III. Virialkoeffizienten ausgedehnt, um zu sehen, ob hierfür die Näherung ausreicht, oder weiter getrieben werden muß. Aber leider zeigt es sich, daß die III. Virialkoeffizienten unzuverlässig sind. Wir wollen deshalb zum Schluß noch die Genauigkeit der II. und III. Virialkoeffizienten der Phys.-Techn. Reichsanstalt diskutieren.

Deren Resultate sind durch die Reihenentwicklungen

$$pv = A + B_1 p + C_1 p^2 + \dots$$

und analog (7)

$$pv = (pv)_0 \left(1 + \frac{B_2}{v} + \frac{C_2}{v_2} + \cdots\right)$$

dargestellt. Nun ist es aber ohne weiteres einleuchtend, daß diese verschiedenen Koeffizienten nicht voneinander unabhängig sein können. Im Gegenteil ergibt einfache Rechnung, daß sein muß:

$$\begin{aligned} A &= (pv)_0 = RT \\ B &= B_2 = B_1 \\ C &= C_2 = RTC_1 + B^2 \end{aligned} \qquad (10)$$

In Tabelle III haben wir nun sämtliche Werte der Reichsanstalt für A, B_1, B_2, C_1 und C_2 in den dort benutzten Einheiten zusammengestellt. Es zeigt sich sogleich, daß schon der II. Virialkoeffizient nicht annähernd so genau ist, als man nach den vielen Dezimalen erwarten sollte, denn zwischen B_1 und B_2 sind Unterschiede von 2 bis 3 Proz. vorhanden (und in der Nähe des Boylepunktes auch erheblich mehr), was die oben bereits erwähnten Unregelmäßigkeiten von B erklärt. Unter C_3 haben wir in der Tab. III den nach der letzten Beziehung der Gl. (10) aus C_1 berechneten Wert aufgenommen; er sollte mit C_2 identisch sein. Da dies nicht der Fall ist, ist eine Neubestimmung der Virialkoeffizienten aus den schönen Messungen der Reichsanstalt dringend erforderlich.

Zusammenfassend läßt sich sagen, daß es hier mittels der inneren Reibung zum ersten Mal gelungen ist, den Einfluß von a und b willkürfrei zu trennen, und diese Größen selbst als Temperaturfunktionen zu bestimmen.

Straßburg, 31. Juli 1930.

(Eingegangen 1. August 1930.)

Temperaturabhängigkeit der Molekularpolarisation von Propylchlorid und 1,2 Dichloräthan, insbesondere unter Berücksichtigung der freien Drehbarkeit.

Von R. Sänger.

I. Propylchlorid.

Letzthin habe ich die Bestimmung des elektrischen Momentes einer Molekel aus dem Temperaturverhalten der Dielektrizitätskonstanten einer eingehenden Kritik unterzogen[1]). Ich habe dabei gezeigt, daß für eine genaue Ermittlung des elektrischen Momentes nur Messungen an Gasen und Dämpfen in Frage kommen, und daß nicht nur auf eine genaue Bestimmung der Dielektrizitätskonstanten, sondern auch auf eine genaue Messung der Dichte Gewicht zu legen ist. In dem von Steiger und mir ausgearbeiteten Verfahren wird zuerst der Temperaturgang des Druckes für eine konstante Dichte ermittelt und hierauf, getrennt davon, die zugehörigen Dielektrizitätskonstanten gemessen. Bis vor kurzem konnten wir aber nur genaue Werte für die Dielektrizitätskonstante angeben; es war uns unmöglich, den Temperaturgang des Druckes mit der gleichen gewünschten Zuverlässigkeit zu bestimmen. Wir haben dann in der Folge eine Apparatur[2]) gebaut, die gestattet, den Temperaturverlauf des Druckes von Gasen und Dämpfen, auch solchen mit hohen Siedepunkten (bei konstant gehaltener Dichte) hinreichend genau zu messen. Wir begannen unsere früheren Messungen zu überprüfen und gleichzeitig Messungen an 1,2 Dichloräthan auszuführen. Aus internen Gründen[3]) sind wir nun für einige Zeit verhindert, die Arbeit fortzusetzen, da wir aber bereits zu einem gewissen Abschluß gekommen sind, geben wir im folgenden einige Meßresultate wieder.

In der genannten Kritik erwähnte ich, daß keine wesentlichen Änderungen in den elektrischen Momenten zu erwarten sind und in der Tat stimmen die neu bestimmten Momente von Methyläther, Methyl- und Äthylchlorid mit den frühern gut überein[4]). Die uns hier interessierenden Momente von Methyl- und Äthylchlorid sind:

Methylchlorid $\mu = 1{,}86_1 \pm 0{,}005 \cdot 10^{-18}$

Äthylchlorid $\mu = 2{,}02_0 \pm 0{,}025 \cdot 10^{-18}$.

In Tabelle I sind die neuen korrigierten Messungen von Propylchlorid ausführlich wiedergegeben. Die erste Kolonne führt die absolute Temperatur, die zweite deren reziproken Wert, und die dritte den in cm Hg gemessenen Druck. Dann folgt die zugehörige Dielektrizitätskonstante und endlich in der letzten Kolonne die Molekularpolarisation P. Der Tabelle sind unten die nach der Methode der kleinsten Quadrate berechneten Konstanten A und B der Debyeschen Gleichung

$$P = A + B\,\frac{1}{T}$$

mit den zugehörigen mittleren Fehlern f_A und f_B zugefügt. Der kleine mittlere quadratische Fehler

Tabelle I.

Propylchlorid.

T	$\frac{10^3}{T}$	p (cm Hg)	$(\varepsilon-1)\cdot 10^5$	P
338,0	2,959	34,15	500,7	101,41
378,0	2,646	38,38	460,3	93,25
418,0	2,392	42,60	429,1	86,92
458,0	2,183	46,83	401,9	81,42

$A = 25{,}31_5$ $\quad f_A = 0{,}41_6$ $\quad f_P = 0{,}09_4$

$B = 2571_2$ $\quad f_B = 160$

f_P demonstriert deutlich die strenge Linearität der Molekularpolarisation als Funktion der reziproken Temperatur. Die Messungen entsprechen der konstanten Dichte $\varrho = 0{,}001290$ gr/cm³. Aus B berechnen wir das elektrische Moment von Propylchlorid zu

$$\mu = 2{,}04_0 \pm 0{,}007 \cdot 10^{-18};$$

wir finden also einen etwas größern Wert als früher[1]).

Tabelle II ist eine Zusammenstellung des temperaturunabhängigen Gliedes A der Molekularpolarisation von Äthyl-, Methyl- und Propylchlorid, sowie der Werte der Molekularrefraktion P_D (für die NaD-Linie):

Tabelle II.

Substanz	A	P_D
Methylchlorid . . .	14,14 ± 0,28	13,0
Äthylchlorid . . .	20,93 ± 1,80	17,6
Propylchlorid . . .	25,32 ± 0,42	20,3

1) $1{,}90 \cdot 10^{-18}$.

1) R. Sänger, Physik. Zeitschr. **31**, 306, 1930.
2) Diss. O. Steiger, Zürich E. T. H.
3) Institutsumbau.
4) Bei der Korrektur dieser Notiz ist eine Arbeit von O. Fuchs, Zeitschr. f. Phys. **63**, 824, 1930 erschienen über Dielektrizitätskonstante organischer Dämpfe. Die Meßresultate von Methyl- und Äthylchlorid stimmen innerhalb der Meßfehlergrenzen mit den unseren überein. Die in einer Fußnote stehende Bemerkung über die von uns gegebenen Werte der optischen Molekularrefraktion ist insofern zu korrigieren, als schon in der Arbeit über Chloride (Helv. Phys. Acta **2**, 411, 1929) bereits die etwas kleineren, verbesserten Werte stehen.

Da der Brechungsindex von dampfförmigem Methyl- und Äthylchlorid nur für eine Wellenlänge bekannt ist, muß von einer Extrapolation auf Wellenlänge ∞ abgesehen werden; für Propylchlorid muß sogar der Wert der Molekularrefraktion aus der flüssigen Phase übernommen werden. Eine Extrapolation würde allerdings die Werte nur sehr wenig verändern; wir können daher der Tabelle II doch entnehmen, daß der Beitrag der ultraroten Eigenschwingungen an die Molekularpolarisation mit wachsendem Radikal zunimmt.

Eucken und Meyer[1]) haben mit Erfolg gezeigt, daß, solange nicht stark polarisierende Wirkungen sich geltend machen, das elektrische Moment einer Molekel vektoriell zusammengesetzt werden kann aus Teilmomenten, die für die im Molekel auftretenden chemischen Bindungen charakteristisch sind. So z. B. sind die Teilmomente der uns hier interessierenden Bindungen: $H\text{-}C$ und $H_3C\text{-}C$ $0{,}4 \cdot 10^{-18}$; $C\text{-}Cl$ $1{,}5 \cdot 10^{-18}$. Halten wir daran fest, so können wir die unterschiedlichen Werte des elektrischen Momentes von Methyl-, Äthyl- und Propylchlorid nur durch Polarisation erklären. Nehmen wir noch an, daß der Valenzwinkel vom Sauerstoff- und Kohlenstoffatom bei einfacher Bindung 110° beträgt (mit kleinen Schwankungen) und daß die von der Chemie geforderte „freie Drehbarkeit" bei Kohlenstoffeinfachbindungen besteht, so können wir, wie auch Stuart[2]) zeigte, den Chloriden folgende Strukturbilder zuordnen:

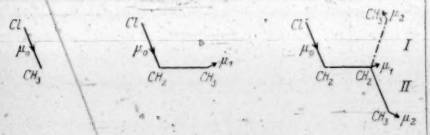


Fig. 1.

In der Figur sind für Propylchlorid die beiden extremen Lagen I und II eingezeichnet. Das elektrische Grundmoment $Cl\text{-}CH_2$ induziert in den zugefügten Gruppen elektrische Momente — in der Figur angedeutet —, die unter anderm bewirken, daß das Moment von Äthylchlorid etwas größer ausfällt, als dasjenige von Methylchlorid, während bei Propylchlorid in der Stellung I ein etwas kleineres, in der Stellung II ein etwas größeres Moment als dasjenige von Äthylchlorid sich ergibt.

Selbstverständlich entspricht der Stellung I die kleinere potentielle Energie als der Stellung II, deshalb kommt Stuart, auch auf Grund unserer frühern Angaben, zum Schluß, daß bei Propylchlorid nur die Stellung I vorkommt. Wir sind der Ansicht, daß der Energieunterschied von I und II (d. h. der Unterschied der Wechselwirkung des Hauptmomentes μ_0 und des kleinen induzierten Momentes μ_2) nicht genügt, um gegen die Energie kT der Temperaturbewegung aufzukommen, daß also die freie Drehbarkeit sich noch ungehindert auswirken kann. Wir erwarten deshalb, daß zwischen den elektrischen Momenten von Äthyl- und Propylchlorid nur ein kleiner Unterschied besteht, von dem wir nicht wissen können, ob er positiv oder negativ ausfällt. In der Tat zeigt der experimentelle Befund einen leichten Anstieg des Momentes beim Übergang von Methyl- zu Äthylchlorid, während die Momente von Äthyl- und Propylchlorid sozusagen gleich sind.

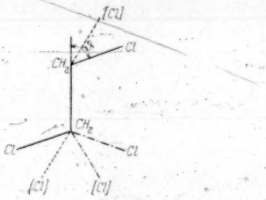
Auf Grund quantentheoretischer Überlegungen ist schon geäußert worden[1]), daß auch bei Kohlenstoffeinfachbindungen möglicherweise zwei ausgezeichnete Gleichgewichtslagen bestehen, ähnlich wie wir sie bei den Doppelbindungen in der trans- und cis-Stellung vorfinden, daß aber der „Energieberg", der beim Übergang von einer Stellung in die andere überschritten werden muß, so niedrig ist, daß im Gegensatz zur Doppelbindung ein Übergang von einer Form in die andere ohne weiteres stattfinden kann, und deshalb auch die beiden Formen von Propylchlorid nicht getrennt dargestellt werden können. In diesem Sinne hätten wir ein solches Gas als eine Mischung von zwei verschiedenen Formen von Molekeln zu betrachten. Ist das Mischungsverhältnis dabei konstant, so würde ein solches Gas genau dieselben dielektrischen Eigenschaften zeigen, wie in Gas mit einheitlichen Molekeln. Bei Propylchlorid entsprächen den beiden isomeren Formen nur sehr wenig unterschiedliche Momente, so daß auch bei kleiner Änderung des Mischungsverhältnisses die Molekularpolarisation ihre Linearität mit der reziproken Temperatur bewahren würde. Immerhin weichen die experimentellen Ergebnisse so wenig von einer Geraden ab, daß nur ein äußerst wenig temperaturabhängiges Mischungsverhältnis verträglich wäre. Bei der Diskussion der experimentellen Befunde von 1,2 Dichloräthan werden wir nochmals darauf zurückkommen. Abschließend wollen wir festhalten, daß unsere Meßbefunde an Propylchlorid einerseits die Annahme einer ungehinderten freien Drehbarkeit der Endgruppe $C\text{-}CH_3$ und $C\text{-}Cl$ um die Achse der $C\text{-}C$ Bindung zulassen, andrerseits aber auch der Annahme von der Existenz zweier Molekelformen mit annähernd konstantem Mischungsverhältnis nicht widersprechen.

1) A. Eucken und L. Meyer, Physik. Zeitschr. **30**, 397, 1929.
2) H. Stuart, Phys. Zeitschr. **31**, 80, 1930.

1) S. a. auch E. Hückel, Zeitschr. f. Phys. **60**, 423, 1930.

II. 1,2 Dichloräthan.

Bei 1,2 Dichloräthan — in Fig. 2 sind wiederum die beiden extremen Lagen gezeichnet — liegen insofern die Verhältnisse verändert, als jede der beiden drehbaren Gruppen CH_2Cl ein



[Cl] deformiertes Modell

Fig. 2.

permanentes Moment μ_0 besitzen, das sich aus dem Teilmoment $(1{,}5 \cdot 10^{-18})$ der *C-Cl*-Bindung und einem Beitrag, herrührend von der Bindung der *H*-Atome, zusammensetzt. Der beweglichen Gruppe können wir ein ungefähres Moment von $1{,}8 \cdot 10^{-18}$ zuschreiben; es muß von ungefähr gleicher Größe sein wie das Moment von Methylchlorid. Bei ungehinderter freier Drehbarkeit und konstantem Valenzwinkel von 110° müßte nach der Formel von Williams[1])

$$\mu = \mu_0 \sin \vartheta \cdot \sqrt{2}$$

(ϑ = Winkel zwischen der Achse *C-Cl* und der Drehachse *C-C* = 70°) das resultierende Gesamtmoment der Molekel $2{,}4 \cdot 10^{-18}$ sein. Voraussetzung für die Berechnung ist, daß keine Deformation des Valenztetraeders vorliegt. Wie aber die Röntgenaufnahmen an den Dämpfen CCl_4, $CHCl_3$ und CH_2Cl_2 zeigen[2]), können Deformationen bis zu einem gewissen Grad auftreten. Wäre auch bei 1,2 Dichloräthan eine solche Deformation vorhanden, so müßte mit einem kleineren Gesamtmoment als $2{,}4 \cdot 10^{-18}$ gerechnet werden.

Bei den meisten in der Literatur behandelten Fällen freier Drehbarkeit sind die Abstände der polaren, beweglichen Gruppen so groß, daß eine Hinderung der Drehbarkeit durch die zwischen den Gruppen auftretenden Kräfte nicht in Frage kommt. Bedenken wir aber, daß im Falle von 1,2 Dichloräthan die gegenseitigen Abstände der beiden polaren Gruppen nur zwischen 3 bis 4 Å schwanken und zudem ihre Momente von recht beträchtlicher Größe sind, so könnte es möglich sein, daß die freie Drehbarkeit durch die auftretenden intermolekularen Kräfte beeinträchtigt, wenn nicht vollständig unterbunden würde.

1) J. W. Williams, Fortschritte d. Chemie, Physik und phys. Chemie Bd. 20, H. 5, p. 50, 1930.
2) S. w. u.

Tragen wir die gegenseitige potentielle Energie der beiden Gruppen als Funktion des Drehwinkels φ auf, so zeigt die Funktion für die Stellung I ($\varphi = 0$) ein Maximum und für die Stellung II ($\varphi = 180°$) ein Minimum — immer so betrachtet, als ob nur Dipolkräfte auftreten. Wird die Drehbarkeit vollständig unterbunden, so müßten wir der Molekel die Form II zuschreiben, ähnlich der trans-Stellung bei der Doppelbindung. Trotzdem brauchte das Moment nicht 0 zu sein, sondern könnte infolge der möglichen zeitlichen Schwingungen einen endlichen aber temperaturabhängigen Wert aufweisen.

Die Beeinträchtigung der freien Drehbarkeit muß selbstverständlich im Temperaturverhalten der Molekularpolarisation zur Geltung kommen. Da tieferen Temperaturen kleinere Momente der Molekel entsprechen, verliert die Molekularpolarisation ihre Linearität mit $\frac{1}{T}$ und kann sogar bei wachsendem $\frac{1}{T}$ zu kleineren Werten übergehen. Untersuchungen über das Temperaturverhalten der Molekularpolarisation von 1,2 Dichloräthan sind daher besonders wertvoll; sie können unter Umständen einen Aufschluß geben über die betrachteten Zusammenhänge.

Vor kurzem hat L. Meyer[1]) Messungen an verdünnten Lösungen von 1,2 Dichloräthan in Benzol (Temperaturbereich $+6°$ bis $+51°$) und in Hexan (Temperaturbereich $-73°$ bis $+41°$) veröffentlicht. Während die Molekularpolarisation des im Benzol gemessenen Dichloräthans noch keine Abweichung vom Debyeschen Gesetz zeigt, vielleicht wegen des kleinen Temperaturintervalles, weicht die aus den Messungen im Hexan bestimmte Molekularpolarisation merklich von einer Geraden ab, besonders bei tieferen Temperaturen. Meyer glaubt daher den oben beschriebenen Effekt gefunden zu haben. Da Messungen an verdünnten Lösungen niemals dieselbe Genauigkeit und Zuverlässigkeit aufweisen können wie Messungen an Gasen, schien es uns angezeigt, Messungen an 1,2 Dichloräthan im Dampfzustand auszuführen, um so mehr, als wir vermuten, auf diese Weise zu einer einwandfreien Beurteilung zu gelangen. Zwar liegen bereits Messungen der Temperaturabhängigkeit der Dielektrizitätskonstanten von dampfförmigem Dichloräthan von Ghosh, Mahanti und Sen Gupta[2]) vor, ihre Genauigkeit ist aber noch keine befriedigende, besonders wenn wir bedenken, daß mit sehr kleinen Dichten

1) Lothar Meyer, Zeitschr. f. phys. Chem. B. 8, 27, 1930.
2) Ghosh, Mahanti und Sen Gupta, Zeitschr. f. Phys. 54, 711, 1929.

Tabelle III.

1,2 Dichloräthan.

T	$\frac{10^3}{T}$	p (cm Hg)	$(\varepsilon-1)\cdot 10^5$	P	
333,0	3,003	25,86	204,8	54,43 ± 0,14	
373,0	2,681	29,00	206,2	54,80$_5$ ± 0,11	
373,0	2,681	29,00	206,0	54,75 ± 0,11	$v = 806{,}3$ cm³/gr
413,0	2,421	32,13	203,4	54,06 ± 0,14	
453,0	2,208	35,26	199,3	52,97 ± 0,13	
333,0	3,003	17,48	145,7	57,43 ± 0,23	$v = 1195{,}7$ cm³/gr

(ca. 7 cm Hg Druck) gearbeitet wurde. Berechnet man aus den von ihnen angegebenen Dielektrizitätskonstanten mit Hilfe des Gasgesetzes — was ohne weiteres gerechtfertigt ist, da nur kleine Abweichungen zu erwarten sind — die Molekularpolarisation von 1,2 Dichloräthan und vergleichen wir den Verlauf der gefundenen Werte mit demjenigen von Meyer, so scheint nach unserer Ansicht keine besonders gute Übereinstimmung zu bestehen.

Wir haben für unsere Untersuchung eine so große Dichte gewählt, daß eine zuverlässige und sehr genaue Messung möglich war; wir wählten sie aber immerhin so klein, daß wir nach unseren bisherigen Erfahrungen an Dämpfen annehmen durften, nicht mehr auf Assoziation zu stoßen. Bei der tiefsten Meßtemperatur von + 60° war der Dampfdruck immer noch verhältnismäßig weit vom Sättigungsdruck entfernt.

Die obenstehende Tabelle III enthält unsere Meßresultate an 1,2 Dichloräthan[1]). Die Anordnung der Kolonnen ist dieselbe wie in Tabelle I. Die Genauigkeit der Dielektrizitätskonstanten bewegt sich für die verschiedenen Messungen innerhalb 1—2 ‰ von $\varepsilon - 1$.

Die experimentelle Bestimmung des Temperaturganges des Druckes haben wir nur für die oberste Temperaturstufe ausgeführt, wobei innerhalb der Meßfehlergrenze von 2 ‰ keine merkliche Abweichung von der Van der Waalsschen Gleichung gefunden wurde. Wir verwenden deshalb für den Temperaturgang des Druckes den nach Van der Waals mit Hilfe der kritischen Daten vorgezeichneten Verlauf. Sollte sich später im Temperaturverhalten der Molekularpolarisation Assoziation geltend machen, so müßten wir allerdings annehmen, daß der Anstieg des Druckes bei tieferen Temperaturen in Wirklichkeit etwas steiler ist als nach der Van der Waalsschen Gleichung. Mit andern Worten, die Messungen der Dielektrizitätskonstanten erfolgt bei tieferen Temperaturen bei etwas zu großen Drucken (eben bei den nach Van der Waals berechneten), und die nachträgliche Korrektur ergäbe eine noch stärkere Krümmung der Molekularpolarisationskurve als Funktion der reziproken Temperatur. Wir laufen daher keinerlei Gefahr für die spätere Erörterung der Meßresultate. Das den Messungen zugehörige konstante spezifische Volumen ist $v = 806{,}3$ cm³/gr, ebenfalls mit Hilfe der Van der Waalsschen Gleichung berechnet. Die unterste Zeile der Tabelle III entspricht hingegen einem etwas größeren spezifischen Volumen von $v = 1195{,}7$ cm³/gr. Selbstverständlich würde die Verwendung der Van der Waalsschen Gleichung für die Dichtebestimmung eine genaue Bestimmung des elektrischen Momentes ausschließen; im vorliegenden Falle kommen wir aber gar nicht dazu, eine solche genaue Bestimmung vorzunehmen.

In Fig. 3 sind unsere Meßergebnisse graphisch dargestellt[1]). Als Abszisse ist die reziproke Temperatur, als Ordinate die gefundene Molekularpolarisation aufgetragen. Wie wir sehen, liegen die Werte der Molekularpolarisation auf einer stark gekrümmten Kurve und man könnte zunächst an eine Bestätigung der Meyerschen Resultate denken. Es könnte sich aber ebensogut um eine reine Assoziationserscheinung handeln. Bilden sich bei tieferer Temperatur Doppelmolekeln, so ist ihr Aufbau dann von minimalster Energie, wenn sich zwei Einzelmoleküle so aneinander lagern, daß ihre Momente nebeneinander

Fig. 3.

1) Es sind nur die Beobachtungen mit sehr kleinen Meßfehlern aufgenommen.

1) Bei zwei Temperaturen sind auch Meßresultate mit größeren Fehlern (8 ‰ in Tabelle III weggelassen) eingezeichnet.

ander, aber in entgegengesetzter Richtung zu liegen kommen. Ein solches Doppelmolekel besitzt aber das Moment o und deshalb könnte die Molekularpolarisation mit sinkender Temperatur auch kleiner werden.

Wir haben die Messung für die tiefste Temperatur von 60° bei einem etwas größeren spezifischen Volumen wiederholt (Genauigkeit der Dielektrizitätskonstante wiederum 2 Proz. o) und konstatierten dabei zu unserer Überraschung, daß sich eine wesentlich größere Molekularpolarisation ergab, die nun genau in die durch die Werte der Molekularpolarisation von 140° und 180° gezogenen Gerade zu liegen kommt. Dadurch ist aber nachgewiesen, daß die gekrümmte Molekularpolarisationskurve eine reine Assoziationserscheinung ist[1]).

Für den bessern Vergleich haben wir in Fig. 4 die Meßresultate von Ghosh, Mahanti und Sen-Gupta, jene von Meyer und unsere zusammengestellt.

Trotzdem wir überzeugt sind, daß die von uns gefundenen auf einer Geraden liegenden Werte noch nicht vollständig frei von Assoziation sind und daß sie sich bei einer Messung mit noch kleinerer Dichte noch mehr den Resultaten von Ghosh, Mahanti und Sen Gupta nähern, wollen wir doch die drei Werte dazu benutzen,

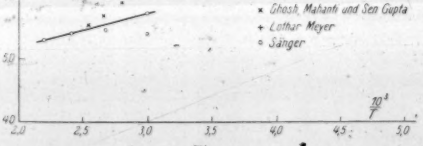


Fig. 4.

das elektrische Moment μ der Molekel und das temperaturunabhängige Glied A der Molekularpolarisation zu berechnen. Wir erhalten:

$$\mu = 1{,}01 \cdot 10^{-18}; \; A = 40 \text{ cm}^3.$$

Die Molekularrefraktion von 1,2 Dichloräthan beträgt $P_D = 20$ cm³. Zweifellos ist der resultierende Ultrarotanteil $A - P_D$ der Molekularpolarisation viel zu groß. Vergleichen wir mit Prophylchlorid, so dürfen wir einen Ultrarotanteil von 25—30 Proz. der Molekularrefraktion erwarten; das würde heißen, A darf einen Wert bis zu 26 cm³ haben, auch 30 cm³ wäre unter Umständen noch zuzulassen. Sicher können wir aber aussagen, daß der von uns angegebene Wert für das elektrische Moment zu klein ist.

1) Immerhin könnten auch Adsorptionseffekte dabei noch eine gewisse Rolle spielen; doch würde dies auf die nachfolgende Diskussion ohne ändernden Einfluß sein.

Legt man durch die von Ghosh, Mahanti und Sen Gupta gefundenen Werte der Molekularpolarisation eine Gerade, so schneidet dieselbe die Ordinatenachse bei ungefähr 17 cm³. Dieser Wert von A ist aber unbedingt zu klein, die gezogene Gerade daher zu steil und das von den Beobachtern angegebene elektrische Moment von $1{,}56 \cdot 10^{-18}$ sicher zu groß. Erst weitere Versuche mit einem etwas größeren spezifischen Volumen[1]) als wir verwendeten, werden die Gerade endgültig festsetzen; doch kann jetzt schon gesagt werden, daß dieselbe nur wenig außerhalb der unsrigen zu liegen kommt.

Meyer führte seine Messungen bei einer Verdünnung von nur ca. 2 Proz. (in Molenbrüchen berechnet) aus, was, wie von Bretscher[2]) an neueren, sehr sorgfältig ausgeführten Messungen an stark verdünnten Lösungen gezeigt wird, noch nicht genügt, um Assoziationsfreiheit zu garantieren. Berechnet man das zu dieser Verdünnung zugehörige spezifische Volumen, welches die Molekeln im Gaszustand aufweisen würden — indem wir das Lösungsmittel entfernt denken —, so erhält man ungefähr 80 cm³/gr. Bedenken wir, daß wir bei einem spezifischen Volumen von 806,3 cm³/gr noch Assoziation begegnet sind, und sogar bei Temperaturen, die höher liegen als jene von Meyer, so können wir die von Meyer gefundene Krümmung der Molekularpolarisation nur als eine Assoziationserscheinung auffassen. Der Einwand, die dielektrische Wirkung des Lösungsmittels könnte die Assoziation vollständig verhindern, ist in Anbetracht der kleinen Dielektrizitätskonstanten des Mittels nicht stichhaltig, sie könnte höchstens eine leichte Abschwächung veranlassen.

Bevor wir auf eine weitere Diskussion eingehen, fassen wir noch kurz das experimentelle Resultat zusammen: Die Molekularpolarisation von 1,2 Dichloräthan zeigt als Funktion der reziproken Temperatur innerhalb eines Temperaturgebietes von 330—450° bei genügend kleiner Dichte die von der Debyeschen Theorie geforderte Linearität. Die Molekel besitzt daher ein konstantes, d. h. temperaturunabhängiges Moment. Die Größe des Momentes können wir auf Grund der bis heute vorhandenen Messungen noch nicht genau angeben; sie liegt voraussichtlich zwischen $1{,}2 - 1{,}4 \cdot 10^{-18}$ e. s. e.

Ein konstantes elektrisches Moment ist aber nur verträglich mit

a) ungehinderter freier Drehbarkeit
b) vollständiger Starrheit.

1) Die Meßgenauigkeit ist aber notwendigerweise kleiner.

2) E. Bretscher erscheint demnächst in den Helv. Phys. Act.

2) Wie wir zu Anfang dieses Abschnittes aussagten, erwarten wir bei ungehinderter freier Drehbarkeit ein Moment der 1,2 Dichloräthan-Molekel von der Größe $2{,}4 \cdot 10^{-18}$. Dabei setzen wir ein starres Kohlenstoffvalenztetraeder voraus mit nur kleinen Schwankungen der Valenzwinkel von 110°. Auf experimentellem Wege haben wir gefunden, daß das Moment der Molekel zwischen $1{,}2 - 1{,}4 \cdot 10^{-18}$ liegen muß. Solange wir daher eine Deformation des Valenztetraeders nicht zulassen, d. h. dem Winkel ϑ nicht erlauben, auch kleinere Werte als 70° anzunehmen, können wir auf Grund der Annahme von ungehinderter freier Drehbarkeit niemals ein so kleines elektrisches Moment verstehen. Um eine Vorstellung zu bekommen, wie stark die Deformation sein müßte, um dem experimentellen Wert gerecht zu werden, berechnen wir den Wert des Winkels ϑ, der nach der Formel von Williams (l. c.) einen Wert des elektrischen Momentes von $1{,}3 \cdot 10^{-18}$ ergäbe. Auf diese Weise erhalten wir $\vartheta = 32°$. Die Deformation des Tetraeders müßte also eine recht beträchtliche sein; sie widerspricht den sonst üblichen Anschauungen der Valenzchemie. Die von Debye[1]) an dampfförmigen CCl_4, $CHCl_3$ bzw. CH_2Cl_2 gefundenen Röntgeninterferenzen geben für die gegenseitigen Abstände der Chloratome die Werte 3,0 Å, 3,1 Å bzw. 3,2 Å, (nach Korrektur infolge der räumlichen Ausdehnung der Atome). Es sind also Abweichungen von dem üblichen Valenzwinkel von 110° durchaus möglich. Die unter a) wiedergegebene Auffassung, die ungehinderte freie Drehbarkeit annimmt, aber stark deformierte Valenztetraeder zuläßt, scheint daher nicht ohne weiteres von der Hand gewiesen werden zu können. Der Energieunterschied einer solchen gestreckten Dichloräthanmolekel in der Stellung I und II ist zudem nur noch ein sehr geringer.

b) Sind die Kräfte zwischen den beiden Endgruppen nur polarer Natur — wir rechnen wieder mit einem undeformierten C-Atom — dann wäre bei einer Unterbindung der Drehbarkeit der 1,2 Dichloräthanmolekel die Stellung II (trans-Stellung) zuzuschreiben. Dieser Stellung würde wenn wir nur kleine Schwingungen um die C-C Achse zulassen, ein nur wenig von o verschiedenes Moment entsprechen. Wollten wir dem experimentell gefundenen Wert des elektrischen Momentes genügen, dann müßten wir mit starken Schwingungen von großer Amplitude rechnen. Das resultierende elektrische Moment der Molekel wäre aber dann unbedingt temperaturempfindlich und damit die Molekularpolarisation nicht linear. Deshalb glauben wir von der Varianten b Abstand nehmen zu müssen.

1) P. Debye, Vortrag auf der Bunsen-Tagung in Heidelberg, erscheint in Zeitschr. f. Elektrochemie.

Auf einen letzten, wesentlichen Punkt ist noch einzugehen: Wenn die an dampfförmigem 1,2 Dichloräthan[1]) erhaltenen Röntgeninterferenzbilder vom Standpunkte eines starren Molekülbildes gedeutet werden, so ergibt sich für den Abstand der Chloratome ein Wert von 4,4 Å. Dieser Abstand entspricht ungefähr dem mittleren Abstand der beiden Chloratome in der Variante a bei deformiertem Valenztetraeder. In einer solchen gestreckten Molekel variiert der Abstand der beiden *Cl* Atome bei einer Drehung der Endgruppen um die *C-C* Achse fast verschwindend wenig (siehe Fig. 2). Es fragt sich daher, ob die erhaltenen Interferenzbilder nicht auch mit der unter a entwickelten Auffassung vereinbar wären.

Wierl[2]) führte vor kurzem dieselben Untersuchungen mit Hilfe von Elektronenstrahlen aus; er glaubt aber die erhaltenen Interferenzbilder an 1,2 Dichloräthan deuten zu müssen durch Einführung zweier charakteristischer Chloratomabstände von der Größe 4,4 Å und 3,2 Å. Er vermutet daher, daß in gewissem Sinne bei der einfachen Bindung ähnliche Verhältnisse vorliegen wie bei der Doppelbindung, indem zwei Formen von Molekeln existieren, die aber beständig ineinander übergehen und nicht getrennt dargestellt werden können. Wie wir bereits bei Propyläther erwähnt haben, ist in der Literatur schon geäußert worden, daß auch quantentheoretische Überlegungen über die Natur der chemischen Bindung bei einfacher und doppelter Kohlenstoffbindung möglicherweise zu denselben Anschauungen führen. Darnach wären für das Verhalten der 1,2 Dichloräthanmolekel in erster Linie Kräfte rein chemischer Natur verantwortlich und erst darüber gelagert kämen mit sekundärer Bedeutung die oben betrachteten Dipolkräfte in Frage. Immerhin ist die Theorie so wenig fundiert, daß auch ihre Folgerungen noch sehr in Frage stehen; zudem bestünde um den dielektrischen Forderungen zu genügen, noch die Forderung nach einem temperaturunabhängigen Mischungsverhältnis beider Molekülsorten.

Zum Schluß wollen wir nochmals feststellen, daß bei genügend großem, spezifischem Volumen die Molekularpolarisation von 1,3 Dichloräthan vollständig normales Temperaturverhalten zeigt und, daß das permanente elektrische Moment von 1,2 Dichloräthan erklärt werden könnte durch eine relativ starke Deformierung des Valenztetraeders der beiden Kohlenstoffatome unter Festhalten an der Möglichkeit einer ungehinderten freien Drehbarkeit.

1) P. Debye, Physik. Zeitschr. **31**, 142, 1930.
2) R. Wierl, Physik. Zeitschr. **31**, 366, 1930.

Zürich, Physikalisches Institut der Eidg. Techn. Hochschule, August 1930.

(Eingegangen 25. August 1930.)

Die Anwendung der Debyeschen Dipoltheorie auf binäre Flüssigkeitsgemische.

III*). Derivate des Ammoniaks.

Von John M. Fogelberg und John Warren Williams**).

Neuerdings ist es praktisch möglich geworden, gewisse fundamentale Eigenschaften der Molekeln, die man bis jetzt nicht theoretisch vorausberechnen kann, mit Hilfe von experimentellen Daten zu bestimmen, die sich auf Eigenheiten ihrer elektrischen Struktur beziehen. Da das elektrische Moment die elektrische Dissymetrie mißt, ist es eine dieser Eigenschaften, die uns hilft, einem Molekül eine bestimmte Struktur zuzuschreiben. Tatsächlich hat man durch diese Studien manche Aufschlüsse über die Struktur erhalten, so daß die Methoden heute sehr bekannt sind. Es war möglich, mit Hilfe dieser und anderer Arten theoretischer und experimenteller Methoden, den zwei Valenzen des Sauerstoffatoms und den vier Valenzen des Kohlenstoffatoms bestimmte Richtungen zu geben. Man glaubt auch — gemäß den Resultaten der elektrischen Moment- und Infrarot-Absorptionsstudien am Ammoniakmolekül — imstande zu sein, den drei Valenzen des Stickstoffatoms gewissen Richtungen zuschreiben zu können. Die Richtungen, die man dem Molekül zuschreiben muß, sind von solcher Art, daß dem Ammoniakmolekül eine symmetrische, pyramidale Form zugeschrieben wird, in der das Stickstoffatom die Spitze der Pyramide einnimmt. Dieses Modell — den modernen physikalischen Auffassungen gemäß hergeleitet — stimmt genau überein mit der Annahme, die Hantzsch und Werner[1]) bekanntlich machten, um die Stereoisomerie der Kohlen-Stickstoffbindungen zu erklären.

Weitere Beweise für die Richtigkeit dieses Ammoniakmodells sind in letzter Zeit auf Grund des ultraroten Absorptionsspektrums sowohl in der Rotation-Vibrationregion, wie auch in der Rotationsregion allein, erhalten worden[2, 3]). Die Struktur wurde von Debye[4]) im Hinblick auf ihre Polarität diskutiert. Es wird dort gezeigt, daß die Dipolmomentdaten mit einer pyramidalen Struktur für Ammoniak übereinstimmen. Nachdem diese Struktur angenommen ist, schien es lohnend, Dipolmomentdaten für eine Anzahl aromatischer und aliphatischer Amine zu bestimmen, und deren Bedeutung zu diskutieren, in dem sie dabei grundsätzlich als Derivate des Ammoniaks betrachtet wurden.

*) I, II: Diese Zeitschrift **29**, 174, 683, 1928.

**) Laboratory of Physical Chemistry, University of Wisconsin.

1) Hantzsch und Werner, Ber. **23**, 11, 1890.

2) Barker, Phys. Rev. **33**, 684, 1929.

3) Badger and Cartwright, Phys. Rev. **33**, 692, 1920.

4) Debye, Polare Molekeln, S. Hirzel, Leipzig. S. 80, 1929.

Experimentelle Daten.

Die Dipolmomente wurden aus Dielektrizitätskonstante (D. K.) und Dichte der binären Flüssigkeitsgemische bestimmt, indem die an anderer Stelle[4, 5]) beschriebene Methode angewandt wurde. Alle Chemikalien wurden vorsichtig gereinigt und alle Messungen wurden mit größtmöglichster Genauigkeit ausgeführt. Der Apparat für die Messung der Dielektrizitätskonstanten wurde ebenfalls an anderer Stelle beschrieben[6]). Alle D. K. und Dichtemessungen wurden bei 25° C ausgeführt. Die Schwingungen wurden durch eine Elektronenröhre erzeugt, die mit einer Frequenz von 10^6 arbeitete.

Die D. K. und Dichtedaten sind in Tab. I gegeben, wobei f_1 der Molenbruch des Lösungsmittels Benzol, d_4^{25} die Dichte der Lösung bei 25°, und ε die D. K. ist. Die molare Polarisation der Lösung ist P_{12}:

$$P_{12} = \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 2} \frac{f_1 M_1 + f_2 M_2}{d} = f_1 P_1 + f_2 P_2 ;$$

P_1 ist die molare Polarisation des Lösungsmittels und P_2 die molare Polarisation des gelösten Moleküls, dessen elektrisches Moment bestimmt wird.

Die Dipolmomente wurden berechnet aus der molaren Polarisation des gelösten Moleküls bei unendlicher Verdünnung. Die Resultate dieser Berechnung werden in Tab. II gegeben. P_2 ist, wie oben bemerkt, die molare Polarisation. P_2'' ist die Polarisation, die durch die Deformation des Moleküls hervorgerufen wird und die aus dem Brechungsexponenten für die Natrium D-Linie berechnet wird, nach der Formel

$$P_2'' = \frac{N_D^2 - 1}{N_D^2 + 2} \frac{M}{d} ;$$

P_2' ist die Polarisation, die durch die Orientierung des Moleküls hervorgerufen ist, und wird dargestellt durch die Formel

$$P_2' = \frac{4\pi}{3} N \frac{\mu^2}{3kT} ,$$

wobei μ das zu bestimmende Dipolmoment ist und die anderen Faktoren Konstante sind. Es wird ferner angenommen, daß $P_2 = P_2'' + P_2'$, es wird demnach der Einfluß einer ultraroten Dispersion nicht in Betracht gezogen.

5) Williams, Fortsch. d. Chem., Phys. u. physik. Chemie **20**, 5, 1930.

6) Williams, loc. cit.

Tabelle I.

Dielektrizitätskonstante und Dichte der Lösungen.

f_1	d_4^{25}	ε	$P_{1,2}$	P_2
		o-Chloranilin		
1,0000	0,8735	2,276	26,66	107
0,9986	0,8741	2,283	26,78	106
0,9944	0,8758	2,304	27,06	104
0,9890	0,8781	2,331	27,51	100
0,9794	0,8820	2,375	28,17	100
		m-Chloranilin		
1,0000	0,8735	2,276	26,66	213
0,9986	0,8741	2,292	26,91	202
0,9931	0,8765	2,350	27,76	184
0,9890	0,8782	2,390	28,34	178
0,9794	0,8821	2,482	29,64	171
		p-Chloranilin		
1,0000	0,8735	2,276	26,66	223
0,9986	0,8741	2,294	26,93	222
0,9944	0,8758	2,349	27,74	220
0,9890	0,8782	2,421	28,77	217
0,9794	0,8822	2,543	30,44	211
		Dimethylanilin		
1,0000	0,8735	2,276	26,66	94
0,9971	0,8738	2,287	26,86	94
0,9926	0,8743	2,304	27,16	94
0,9856	0,8750	2,331	27,63	94
0,9784	0,8760	2,358	28,10	93
		Methylanilin		
1,0000	0,8735	2,276	26,66	93
0,9967	0,8740	2,290	26,88	93
0,9917	0,8747	2,310	27,21	93
0,9836	0,8758	2,344	27,75	93
0,9756	0,8770	2,376	28,24	91
		Triäthylamin		
1,0000	0,8735	2,276	26,66	51
0,9918	0,8716	2,281	26,85	50
0,9838	0,8696	2,284	27,03	49
0,9759	0,8678	2,287	27,20	49
		Diäthylamin		
1,0000	0,8735	2,276	26,66	54
0,9942	0,8725	2,284	26,80	54
0,9893	0,8713	2,293	26,96	54
0,9788	0,8691	2,309	27,25	54
0,9686	0,8670	2,326	27,53	54

Diskussion der Resultate.

Um die Ergebnisse zu diskutieren für Moleküle, die ein dreiwertiges *N*-Atom enthalten, wird es gut sein, zuerst die Folgerungen in Erinnerung zu bringen, die aus Polaritätsmessungen gezogen werden, welche sich bezogen auf Verbindungen, die ein zweiwertiges *O*-Atom enthalten[7]).

7) Williams and Fogelberg, Journ. Am. Chem. Soc. **52**, 1356, 1930.

Tabelle II.

Dipolmomente für Amine.

Moleküle	P_2	P_2''	P_2'	$\mu \times 10^{18}$
o-$NH_2C_6H_4CH_3$ a)	78	35	43	1,44
m-$NH_2C_6H_4CH_3$ a)	86	35	51	1,57
p-$NH_2C_6H_4CH_3$ a)	92	35	57	1,65
o-$NH_2C_6H_4Cl$	107	36	71	1,84
m-$NH_2C_6H_4Cl$	213	36	177	2,91
p-$NH_2C_6H_4Cl$	223	36	187	3,00
$C_6H_5N(CH_3)_2$	94	41	53	1,58
$C_6H_5NHCH_3$	93	36	57	1,64
$(C_2H_5)_3N$	51	34	17	0,90
$(C_2H_5)_2NH$	54	24	30	1,20
o-$C_6H_4(NH_2)_2$ b)	79	35	44	1,45
m-$C_6H_4(NH_2)_2$ b)	103	35	68	1,79
p-$C_6H_4(NH_2)_2$ b)	88	35	53	1,58

a) Daten des Herrn I. J. Cartwright, Thesis submitted to University of Wisconsin for M. S. degree, 1929.

b) Daten aus dem Artikel von Williams und Fogelberg, Physik. Zeitschr. **31**, 363, 1930.

Es ist möglich, gewissen Atomgruppen auch zahlenmäßig einen polaren Charakter zuzuschreiben, d. h. sie zu charakterisieren durch ein elektrisches Moment, das als Vektor Größe und Richtung hat. Nur über das Vorzeichen könnte man im Zweifel sein. Das wurde vermieden durch die Annahme, daß die CH_3-Gruppe positiv sei. Die Art und Weise, wie diese Polarität bestimmt wurde, wurde in früheren Artikeln diskutiert, und soll hier nicht wiederholt werden. Diese Methode, einem Atom oder einer Gruppe von Atomen einen bestimmten Charakter zuzuschreiben, ist ganz zufriedenstellend, vorausgesetzt, daß die Gruppe einfacher Natur ist. Aber sollte die substituierte Gruppe irgendwie kompliziert gebaut sein, so könnte das aus zwei Gründen zu Schwierigkeiten führen. 1. Es mag eine Interaktion zwischen mehreren substituierten Gruppen entstehen. 2. Es mag notwendig sein, die Stereochemie des speziellen Atoms, das die substituierte Gruppe mit Benzol oder mit anderen Kohlenwasserstoffverbindungen verbindet, in Betracht zu ziehen. Beide Faktoren wurden sehr bald erkannt und von einem von uns[8]), sowie auch unabhängig von Höjendahl[9]) beschrieben. Spätere Forschungen haben nur dazu gedient, diese Schlüsse zu bestätigen. Nur wird die Schwierigkeit, diese zwei Effekte auseinander zu halten, um so größer, je komplizierter das Molekül gebaut ist.

Es ist zuerst nötig, die Struktur des Wassermoleküls zu betrachten. Eine ausgezeichnete Zusammenfassung des zugänglichen Materials wurde von Debye[4]) herausgegeben. Er zieht den

8) Williams, Physik. Zeitschr. **29**, 271, 1928.

9) Höjendahl, Studies of Dipole Moment, Dissertation, Kopenhagen 1928.

Schluß, daß es zwei mögliche Modelle gibt, beide in dreieckiger Form.

Es wurde schon erwähnt, daß Diäthyläther, Methylalkohol, Anisol, die Kresole, Derivate der Dihydroxybenzole und anderer ähnlicher Sauerstoffderivate am einfachsten aufgefaßt werden können als Moleküle, deren Zentren von *O*-Atomen gebildet werden, und die sich voneinander nur durch die Gruppen unterscheiden, die mit den *O*-Atomen gekoppelt sind, wie das in üblicher Weise durch Valenzstriche zum Ausdruck gebracht wird. Diese Verbindungen erscheinen somit als abgeleitet aus der Struktur des Wassermoleküls. Solch eine Struktur scheint z. B. die einzige Erklärung zu sein für die Tatsache, daß Hydrochinondiäthyläther ein bestimmtes Dipolmoment hat[8]). Dem entspricht es, daß es, um die Dipolmomente der substituierten Phenole zu erklären, notwendig ist, sie eher als Derivate des Sauerstoffs, als des Benzols anzusehen.

Das genaue Dipolmoment solch eines Moleküls vorauszusagen, ist kein einfaches Problem. Die größte Schwierigkeit ist darin zu sehen, daß bis jetzt der Winkel zwischen den zwei Richtungen der Valenzen des Sauerstoffatoms noch ungewiß ist. Es wird gewöhnlich angenommen, daß der Winkel 110° [10]) ist; jedenfalls kann nur mit Sicherheit gesagt werden, daß der Winkel kleiner als 180° ist. Ferner hat man allen Grund zu glauben, daß zwei Substituenten am selben Sauerstoffatom sich gegenseitig anziehen werden, wenn sie nicht dieselbe Ladung haben, und daß sie mit gleicher Ladung sich gegenseitig abstoßen. Ein Beweis der gegenseitigen Abstoßung ist gegeben in den Fällen, wo zwei oder drei Chloratome mit einem einzigen Kohlenstoffatom verbunden sind[11]), und in demselben Artikel ist gezeigt, daß, wo gleiche Atome oder Gruppen an benachbarte Kohlenstoffatome gebunden sind, dieselben sich gegenseitig abstoßen. Es scheint, daß sich dieser Einfluß bis auf eine Entfernung von vier Kohlenstoffatomen auswirken kann.

Zusammenfassend ergab es sich also als passend: Moleküle, die ein *O*-Atom enthalten, so zu betrachten, als ob sie um das *O*-Atom als Zentrum gebaut sind in Valenzrichtungen, die einen Winkel mit einander bilden, der wesentlich kleiner als 180° ist. Dadurch wird vermieden, der Hydroxyl- oder der Methoxy-Gruppe eine für alle Fälle genau bestimmte Polarität zuschreiben zu müssen.

Die Ergebnisse dieses Artikels für Moleküle, welche die NH_2-Gruppe enthalten, zeigen in ähnlicher Weise, daß es kaum möglich ist, dieser Gruppe einen bestimmten elektrischen Charakter zu geben. Vielmehr zeigen sie, daß die Dipolmomentdaten viel besser erklärt werden können, wenn man jene Verbindungen als Derivate des Ammoniakmoleküls betrachtet, auf dessen Struktur in der Einleitung hingewiesen wurde. Da es bis jetzt unmöglich ist, die Größe des Winkels, den die Vektoren miteinander bilden, mit irgendwelcher Sicherheit zu bestimmen, muß darauf hingewiesen werden, daß die Betrachtungen dieses Artikels nur qualitativer Natur sind. Der Grund, warum dieser Winkel nicht mit Sicherheit gefunden werden kann, ist wieder der Einfluß der gegenseitigen Anziehung oder Abstoßung der substituierten Gruppen.

Die Daten in Tab. II machen ohne weiteres klar, warum es unmöglich ist, der NH_2-Gruppe einen bestimmten polaren Charakter zuzuschreiben, trotzdem sie gewöhnlich als eine substituierende Gruppe betrachtet wird. Gibt man der CH_3-Gruppe einen positiven Charakter, dann muß man der NO_2-Gruppe einen negativen geben, weil das Moment der Nitrotoluole zunimmt, während wir von der Ortho- durch die Meta- zu der Para-Stellung übergehen. Auch die Momente der Nitroaniline nehmen zu, wenn man in dieser Richtung um den Benzolring herumgeht, und die Folgerung würde sein, daß die NH_2-Gruppe in entgegengesetzter Richtung wirken muß als die NO_2-Gruppe, d. h. positiv ist. Wenn man aber die Daten für die Toluidine in Betracht zieht, die in Tab. II gegeben sind, so ist das einzige, was man daraus schließen kann, daß die CH_3- und die NH_2-Gruppen entgegengesetzt geladen sind. In dem einen Falle erscheint also die NH_2-Gruppe positiv, in dem andern negativ.

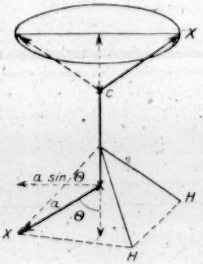
Die Momente für die drei Phenylendiamine, die in Tab. II gegeben sind, erschienen in dieser Verbindung auch sehr interessant. Die Paraverbindung hat ein endliches Dipolmoment, ebenso wie es Hydrochinondiäthyläther hat, und ebenfalls aus ähnlichen Gründen. Es wurde ferner gefunden, daß das Metaphenylendiamin ein Moment hat, das viel größer ist, als das der entsprechenden Ortho- oder Paraverbindung. Diese Daten zeigen, daß man nicht nur die Stereochemie der Stickstoffatome, die mit dem Benzolring in Verbindung stehen, in Betracht ziehen muß, sondern auch die Interaktion zwischen den Gruppen. Es erscheint im Falle der Paraderivate, daß eine „freie Drehbarkeit" um die Valenzbindung *C*—*N* besteht, so daß jede mögliche Stellung zwischen den zwei Vektoren auftreten kann. Im Falle der Metaverbindung erscheint es dagegen, als ob ein elektrischer Einfluß besteht, welcher die Stellung, in der sich beide Vektoren gegenseitig aufheben, weniger häufig macht. Diese gegenseitige Beeinflussung der Gruppen dürfte sich

10) Wolf, Zeitschr. phys. Chem., 3 B, 128, 1929; Eucken und Meyer, Physik. Zeitschr. **30**, 397, 1929.

11) Williams, Zeitschr. phys. Chem. 138 A, 75, 1928.

auch im Falle des Orthophenylendiamins bemerkbar machen.

In den letzten Monaten wurde viel über die sogenannte freie Drehbarkeit von Gruppen im Molekül diskutiert. Es ist schwer zu entscheiden, ob eine völlig freie Drehbarkeit in den Fällen, in welchen sie zunächst angenommen worden ist, tatsächlich existiert. Es wurde z. B. gefunden, daß Äthylenchlorid ein endliches Dipolmoment besitzt, und da bis jetzt kein Isomer der Cis-Transform gefunden wurde, so scheint es natürlich, anzunehmen, daß die zwei Teile des Moleküls die Möglichkeit der freien Drehbarkeit um die Kohlenstoff-Kohlenstoffbindung haben. Wenn wir diese Annahme machen, so ist es möglich[11]) für das Moment die Formel $\mu = \sqrt{2}\, a \sin\Theta$ abzuleiten. Das ist eine allgemeingültige Formel, die in jedem Fall wahr sein wird, wo eine freie Drehbarkeit angenommen werden kann und in der a die charakteristische Vektorgröße des betreffenden Atoms oder Radikals bedeutet. Da a sowohl wie μ (das Durchschnittsmoment des Moleküls) bekannt sind, folgt somit unmittelbar der Wert für $\sin\Theta$ bzw. der Winkel Θ selbst. Der Winkel Θ ist der Winkel, der von den Vektoren (Größe a), die das polare Atom oder die Gruppe charakterisieren, mit der Verbindungsachse C—C gebildet wird. Das wird durch die Figur erläutert. Wird



diese Gleichung auf Äthylenchlorid angewendet, so zeigt es sich, daß der Winkel Θ sich zu ungefähr 38° ergibt. Wenn aber die zwei Tetraeder nicht durch die Interaktion der Chloratome gestört worden wären, so müßte der Winkel ungefähr 70° gewesen sein. Man kann mit anderen Worten schließen, daß in diesem Falle die Drehbarkeit um die Kohlenstoff-Kohlenstoffbindung nicht frei ist, sondern durch die Interaktion zwischen den polaren Teilen des Moleküls gestört wird. Zur Zeit glaubt man, daß wir es im Falle der parasubstituierten Benzole mit gleichen Substituenten, z. B. im Falle des Hydrochinondiäthyläthers, tatsächlich mit freier Rotation zu tun haben; aber selbst hier wäre es ratsam, keine endgültigen Folgerungen zu ziehen, bis sich mehr Material angesammelt hat. Debye[12]) meint, daß Experimente über die Röntgenstreuung einzelner Moleküle uns eine endgültige Antwort auf das Problem der freien Drehbarkeit geben werden. Vorläufig aber ist eine endgültige Entscheidung noch nicht gefallen.

Wir bringen noch Tab. III, um die Dipolmomentdaten für die Stickstoffverbindungen mit denen der entsprechenden Sauerstoffverbindungen zu vergleichen. Es besteht eine auffallende Ähnlichkeit zwischen diesen Daten, und diese Ähnlichkeit kann nur dann erklärt werden, wenn man annimmt, daß das Stickstoffatom seine drei Valenzen in solcher Weise nach außen gerichtet hat, daß gebundene Atome oder Gruppen sich in beiden Fällen ähnlich beeinflussen.

Tabelle III.

Vergleich der Dipolmomentdaten.

Molekül	$\mu \cdot 10^{18}$	Molekül	$\mu \cdot 10^{18}$
o-$NH_2C_6H_4CH_3$	1,44	o-$CH_3C_6H_4OH$	1,54
m-$NH_2C_6H_4CH_3$	1,57	m-$CH_3C_6H_4OH$	1,76
p-$NH_2C_6H_4CH_3$	1,65	p-$CH_3C_6H_4OH$	1,81
o-$NH_2C_6H_4Cl$	1,84	o-ClC_6H_4OH	1,43
m-$NH_2C_6H_4Cl$	2,91	m-ClC_6H_4OH	2,17
p-$NH_2C_6H_4Cl$	3,00	p-ClC_6H_4OH	2,68
NH_3	1,51	H_2O	1,85
$(C_2H_5)_3N$	0,90	$(C_2H_5)_2O$	1,14

Die Daten für die Äthylamine können in derselben Art erklärt werden, wie dies von Sänger[13]) für die fünf Gase CH_4, CH_3Cl, CH_2Cl_2, $CHCl_3$ und CCl_4 geschehen ist. Fängt man mit Ammoniak an, das ein Dipolmoment $\mu = 1{,}5 \cdot 10^{-18}$ e. s. E. hat, und ersetzen wir zwei der Wasserstoffe durch Äthylgruppe, so wird das Dipolmoment auf $\mu = 1{,}2 \cdot 10^{-18}$ e. s. E. herunterkommen. Ersetzen wir alle Wasserstoffatome, so wird das Moment bis auf $\mu = 0{,}90 \cdot 10^{-18}$ e. s. E. erniedrigt. Das Einführen großer Gruppen führt zu einer gegenseitigen Abstoßung, und die Pyramide wird abgeflacht. Vom Ammoniakmolekül wird angenommen, daß es nicht sehr hoch ist[2, 3]). Es wird ferner angenommen, daß elektrische Beeinflussung die Unterschiede der Dipolmomente von Wasser und Äthyläther erklärt.

Das Dipolmoment für Anilin ist $\mu = 1{,}51 \cdot 10^{-18}$ e. s. E. Dieses Moment nimmt zu, wenn ein oder zwei H-Atome der NH_2-Gruppe durch CH_3 ersetzt werden. Das monosubstituierte Anilin ist weniger symmetrisch als das disubstituierte Molekül, was vielleicht erwartet werden durfte. Diese

12) Debye, Proc. Phys. Soc. London, **42**, 340, 1930.

13) Sänger, Physik. Zeitschr. **27**, 556, 1926.

Daten zeigen, daß die Einführung selbst einer so einfachen Gruppe wie CH_3, die Polarität eines Moleküls bedeutend beeinflussen kann. Werden beide Wasserstoffatome, die an Stickstoff des Anilins gebunden sind, auf diese Art ersetzt, so erhält man ein Molekül, das stärker polar ist als Anilin. Werden aber die entsprechenden vier Wasserstoffatome des Para-Phenylendiamins durch vier Methylgruppen ersetzt, so erhält man ein Molekül, das viel weniger polar ist, weil die gegenseitige Abstoßung zwischen den größeren Gruppen die trans-Position wahrscheinlicher macht als die cis-Position, vorausgesetzt, daß eine Rotation um beide Kohlenstoff-Stickstoffverbindungen stattfindet.

Zusammenfassung.

1. Dipolmomentdaten für eine Anzahl von trivalenten Stickstoffverbindungen wurden mit Hilfe der Methode der binären Mischungen erhalten. Werte für die Dielektrizitätskonstanten und Dichten sind gleichzeitig angegeben.

2. Die Daten wurden vom Gesichtspunkte der Stereochemie des Stickstoffatoms aus diskutiert.

3. Es wurde gezeigt, daß das Dipolmoment eines solchen Moleküls im allgemeinen nur dann berechnet werden kann, wenn man die den Gruppen charakteristischen Vektoren in ihrer Lagerung im Raum betrachtet, und zwar aus zwei Gründen: a) Es ist nötig, die Stereochemie der Atome, die die substituierende Gruppe bilden, in Betracht zu ziehen. b) Es ist notwendig, die gegenseitige Anziehung und Abstoßung zwischen den substituierenden Gruppen zu beachten.

4. Nach dem heutigen Stande ist unsere Kenntnis unzureichend, um eine Vorausberechnung des Dipolmoments eines „Stickstoffderivates" auch nur einigermaßen genau durchführen zu können.

Madison, Wisconsin, U.S.A., 9. August 1930.

(Eingegangen 16. September 1930.)

Wo erreichen kosmische Elektronenstrahlen die Erdkugel?

Von E. Brüche.

(Aus dem Forschungs-Institut der AEG)

Im Anschluß an einen Vortrag[1]) über Experimente zu Störmers Polarlichttheorie bin ich gefragt worden, ob es denn überhaupt möglich sei, die durchdringende Höhenstrahlung als Elektronenstrahlung aus dem Weltraum aufzufassen[1]) oder ob nicht der von Elektronen freie Torus um die Erde diese Erklärung unmöglich mache.

Es ist natürlich so, daß man die Elektronen nur genügend schnell anzunehmen braucht, um eine beliebig weitgehende Annäherung an den magnetischen Dipol, d. h. ein Treffen der Erdoberfläche in allen Breiten zu ermöglichen. Diese Fragen sind an sich durch die Rechnungen von C. Störmer geklärt[2]), doch scheint es trotzdem nicht überflüssig zu sein, darauf in anschaulicher Form und zahlenmäßig kurz einzugehen, zumal aus diesen Überlegungen eine Aussage über die Richtungsverteilung der eintreffenden Elektronenstrahlung folgt.

Nach Störmer[3]) lautet die Gleichung der Torus-Meridiankurve:

$$r = K_1 \frac{\sqrt{1 + \cos^3 \varphi} - 1}{\cos \varphi}, \qquad (1)$$

wenn man unter r = Laufstrahl und φ den geographischen Breitenwinkel versteht. Diese Kurve stimmt, wie es der Verfasser[4]) gezeigt hat, in

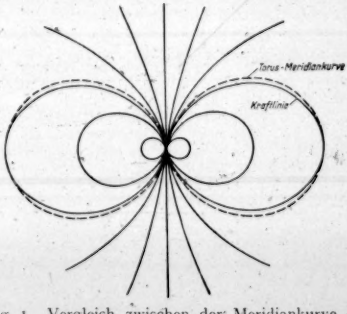


Fig. 1. Vergleich zwischen der Meridiankurve des Elektronentorus und der Kraftlinie.

großer Annäherung mit der Dipol-Kraftlinienkurve überein, die die einfachere und für unsere Rechnungen bequemere Form hat:

$$r = K_2 \cos^2 \varphi, \qquad (2)$$

worin K_2 eine von K_1 verschiedene Konstante bedeutet. Fig. 1 zeigt die Ähnlichkeit der beiden Kurven.

Da, wie sich leicht zeigen läßt, der Radius des Torus am Äquator der $(\sqrt{2} - 1)$te Teil des Kreisbahnabstandes c ist, und da für die Kreis-

1) Vgl. hierzu: W. Kolhörster, Naturw. **17**, 412. 1919; W. Bothe u. W. Kolhörster, Zeitschr. f. Phys. **56**, 776, 1929.

2) Anmerkung bei der Korrektur: Vgl. auch die soeben erschienene Arbeit von P. S. Epstein, Proc. Nat. Acad. Amer. **16**, 627, 1930, die sich teilweise mit Störmers Arbeiten deckt.

3) C. Störmer, Naturw. **17**, 649, 1929.

4) E. Brüche, Naturw. im Druck.

1) E. Brüche, Physik. Zeitschr. **31**, 1011, 1930.

bahn selbst die Beziehung gilt:

$$\varepsilon = \sqrt{\frac{M}{H \cdot \varrho}} = \sqrt{\frac{M}{\frac{m}{e} v}}, \qquad (3)$$

($M =$ magnet. Dipolmoment,

$H\varrho = \frac{m}{e} v =$ Steifigkeit des Elektronenstrahls)

so gilt für die Torus-Meridiankurve:

$$r = (\sqrt{2} - 1) \sqrt{\frac{M}{H\varrho}} \cos^2 \varphi . \qquad (4)$$

Um zu erkennen, welche Steifigkeit $H\varrho$ die angenommenen Elektronenstrahlen haben müssen, um in bestimmte Breiten der Erdkugel vom Pole her vorzudringen, bringen wir die Torus-Meridiankurve mit der Erdmeridiankurve, d. h. mit dem Kreis $r = R =$ konst., zum Schnitt. Nach $H\varrho$ aufgelöst lautet die Gleichung dann:

$$H\varrho = (\sqrt{2} - 1)^2 \frac{M}{R^2} \cos^4 \varphi . \qquad (5)$$

Setzen wir die Erddaten $M = 8{,}4 \times 10^{25}$ und $R = 6{,}4 \times 10^8$ cm ein, so wird:

$$H\varrho = 3{,}5 \cdot 10^7 \cos^4 \varphi . \qquad (6)$$

In Polarkoordinaten dargestellt erhalten wir die gestrichelte Kurve der Fig. 2, die sich von der

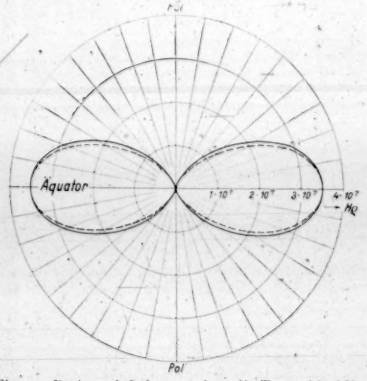


Fig. 2. Breitenwinkel, unter dem die Torus-Meridiankurve auf die Erdoberfläche aufsetzt, in Abhängigkeit von der Strahlsteifigkeit $H\varrho$.

Kurve der Fig. 1 nur dadurch unterscheidet, daß hier das Quadrat von $\cos^2 \varphi$ auf dem Laufstrahl aufgetragen ist. Wir erkennen, daß eine Elektronenstrahlung, deren Steifigkeit $H\varrho \geq 3{,}5 \cdot 10^7$ ist, die Erdkugel an allen Punkten erreichen wird.

Diese Rechnungen sind insofern Annäherungsrechnungen, als wir den Erdmagneten durch einen magnetischen Dipol angenähert, die Torusmeridiankurve durch die Kraftlinienkurve ersetzt und den Ringstrom um die Erde vernachlässigt haben. Die zweite Vernachlässigung ließe sich leicht vermeiden, indem wir an Stelle Gl. (2) die exakte Beziehung (1) benutzen würden. So erhalten wir in Fig. 2 an Stelle der gestrichelten Kurve die ausgezogene Kurve, die für $\varphi = 50^0$ bis 90^0 bereits früher von C. Störmer[1]) in anderem Zusammenhange errechnet worden ist.

Gehen wir nun noch von der Steifigkeit zur Geschwindigkeit über, indem wir die Beziehung benutzen:

$$H\varrho = \frac{m}{e} v , \qquad (7)$$

wobei

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{V}\right)^2}} . \qquad (8)$$

Zunächst zeigen Fig. 3 und 4 den Zusammenhang zwischen Steifigkeit, Voltgeschwindigkeit[2])

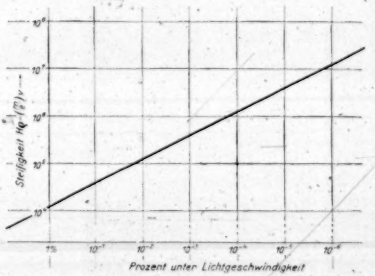


Fig. 3. Zusammenhang zwischen Strahlsteifigkeit und Lineargeschwindigkeit.

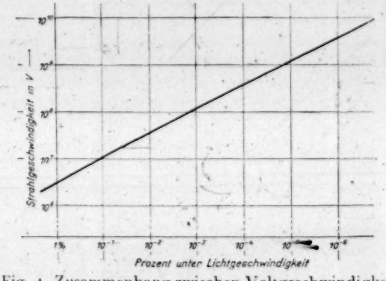


Fig. 4. Zusammenhang zwischen Voltgeschwindigkeit und Lineargeschwindigkeit.

und Lichtgeschwindigkeit im Gebiete sehr hoher Geschwindigkeiten. Dann stellt schließlich Fig. 5 in Abhängigkeit vom Breitenwinkel dar, welche Geschwindigkeit die Strahlen haben müssen, die

1) C. Störmer, Archives des Sciences phys. et natur. IV, **32**, S. 97, 1911.

2) Z. B. P. Lenard, „Quantitatives", S. 44, 1925.

den betreffenden magnetischen Breitenwinkel gerade noch erreichen. (Zur Rechnung ist jetzt

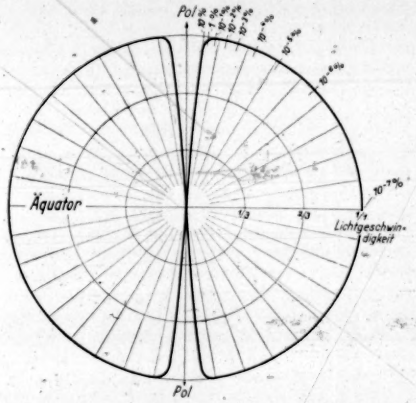


Fig. 5. Grenzwinkel des Elektroneneinfalls in Abhängigkeit von der Lineargeschwindigkeit der Elektronen.

die exakte, ausgezogene Kurve der Fig. 2 benutzt worden.)

Die Auftragung zeigt, daß nur Strahlen, deren Geschwindigkeit sehr wenig unter der Lichtgeschwindigkeit liegt, mittlere Breiten der Erdkugel erreichen werden.

Für Mitteldeutschland, das nach Fig. 6 unter dem magnetischen Breitenwinkel $\varphi \sim 50^0$ liegt, ergibt sich so, daß eine Elektronen-Höhenstrahlung eine Minimalgeschwindigkeit haben müßte, die nur 5 Milliontel Proz. unterhalb der Lichtgeschwindigkeit liegt. Diese Strahlung könnte

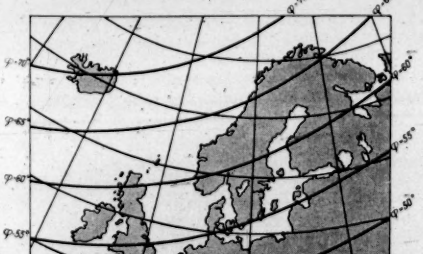


Fig. 6. Magnetische Breitenkreise in Nordeuropa.

durch eine Entladungsspannung von $5 \cdot 10^9$ Volt erzeugt werden. — Eine Strahlung $H\varrho = 3{,}5 \cdot 10^7$ entsprechend 1 Zehnmilliontel Proz. unter Lichtgeschwindigkeit, entsprechend 10^{10} Volt[1]), würde die Erdkugel an allen Orten erreichen[2]).

Wenn man die kosmische Ultrastrahlung als Elektronenstrahlung deutet, kann man aus Absorptionsmessungen ihre Härte abschätzen[3]). Man kommt auf Werte, die mit der errechneten Grenzgeschwindigkeit $H\varrho = 3{,}5 \cdot 10^7$ von ähnlicher Größenordnung sind.

Nun noch eine Folgerung[4]). Denken wir uns mit unserem Beobachtungsapparat gerade an demjenigen Breitenkreis der Erdkugel, auf dem die Grenzfläche des Elektronentorus auf die Erdoberfläche aufsetzt. Würden wir messen, wieviel Strahlung aus den verschiedenen Raumrichtungen zu uns gelangt, so würden wir finden, daß aus der Richtung vom Äquator her keine Strahlung eintrifft, da dort ja das elektronenfreie Gebiet liegt. Auch wenn wir uns nicht genau auf dem Breitenkreis befinden, der den Schnitt zwischen Elektronentorus und Erdoberfläche bildet, die Schnittlinie sich vielmehr näher dem Äquator befindet bzw. die Elektronenstrahlung auch den Äquator erreichen kann, werden wir doch eine Richtungsverteilung der eintreffenden Elektronenstrahlung zu erwarten haben. Der Winkelraum gegen den magnetischen Äquator müßte prinzipiell benachteiligt sein. Wie weit sich das praktisch auswirken wird, läßt sich schwer voraussagen, denn hier spielt noch mancherlei mit, was sich rechnerisch kaum berücksichtigen läßt.

1) Vgl. auch E. Steinke, Zeitschr. f. Phys. **64**, 63, 1930, der angibt, daß Strahlen von 1 Milliarde Volt die Erde noch nicht an allen Stellen treffen können.

2) Die hier behandelte Frage lautet: Wie schnell müssen aus dem Unendlichen kommende Elektronen mindestens sein, um eine magnetische Kugel an bestimmten Stellen erreichen zu können? Kehrt man diese Frage um, so erhält man: Wie schnell müssen von bestimmten Stellen einer magnetischen Kugel ausgehende Elektronenstrahlen mindestens sein, um ins Unendliche gelangen zu können? Offensichtlich sind beide Fragen in mathematischer Hinsicht identisch, so daß wir aus unseren bisherigen Rechnungen unmittelbar auch die zweite Frage beantworten könnten. Diese Frage würde physikalisch gefaßt lauten: Wie schnell müssen Elektronenstrahlen, die von bestimmten Punkten der Sonne ausgehen, mindestens sein, um das Sonnenkraftfeld verlassen zu können? Die Frage scheint jedoch zu wenig praktisches Interesse zu haben, und über das Magnetfeld der Sonne ist zu wenig Kenntnis vorhanden, als daß ihre Verfolgung von Wert wäre. Vgl. auch C. Störmer. Vid. Selsk. Skr. Nr. 14, 1913 (Modèle de la couronne du soleil).

3) Vgl. Bothe u. Kohlhörster, Zeitschr. f. Phys. **56**, 751, 1929.

4) Auf mögliche Zusammenhänge zwischen dem Verhalten der Höhenstrahlung und den Linien gleicher Nordlichthäufigkeit ist von Bothe und Kohlhörster hingewiesen worden (Zeitschr. f. Phys. **56**, 776, 1929).

Berlin, im Oktober 1930.

(Eingegangen 10. November 1930.)

Über die Eigenschaften der Kernelektronen.

Von J. Kudar.

Der erste erfolgreiche Vorstoß in die Gesetzmäßigkeiten der Kernphysik war die quantenmechanische Theorie der α-Strahlung, welche von Gâmow, sowie von Condon und Gurney begründet wurde. Der quantitative Erfolg dieser Theorie war die genaue Berechnung des Zusammenhanges zwischen Zerfallswahrscheinlichkeit, Zerfallsenergie und Kernradius, d. h. die restlose Aufklärung der Geiger-Nuttallschen empirischen Beziehung. Mit dieser Leistung hat die Quantentheorie der α-Strahlung einen vorläufigen Abschluß erreicht.

Die experimentellen Tatsachen zeigen größe Unterschiede in den Eigenschaften der drei Kernbauelemente. Es ist bekannt, daß das magnetische Moment der Atomkerne von den Protonen herrührt, dagegen der Elektronenmagnetismus, d. h. das Bohrsche Magneton in den Atomkernen gar nicht existiert[1]). Eine andere sehr wichtige Tatsache ist, daß die radioaktiven β-Strahlen kontinuierliches Energiespektrum zeigen, während die Energie der α-Strahlen scharf definiert ist[2]).

Es wurde vor längerer Zeit schon versucht[3]), quantentheoretische Ansätze auf das Problem der kontinuierlichen β-Strahlung anzuwenden; jene Betrachtungen gingen von der Forderung des Korrespondenzprinzips aus, nachdem ein aperiodisch beschleunigtes Elektron eine kontinuierliche Strahlung aussenden sollte. Diese Auffassung scheiterte zunächst daran, daß die Nichtexistenz jener kontinuierlichen γ-Strahlung experimentell nachgewiesen wurde[4]). Andererseits scheint die Richtigkeit einer solchen Anwendung des Korresponderzprinzips zumindest zweifelhaft, da, wie wir heute wissen, strahlungslose Übergänge zwischen Zuständen gleicher Energie nach der Quantenmechanik ganz natürlich sind. Kürzlich wurde der Versuch gemacht, der Kontinuierlichkeit der β-Spektren in der neuen Fassung der Quantenelektrodynamik gerecht zu werden[5]). Nach Heisenberg und Pauli soll durch die Retardierung eine Unschärfe der β-Strahlenergie zustande kommen[6]). Dabei sollte natürlich die entsprechende kontinuierliche γ-Strahlung auftreten. Aber abgesehen von der Nichtexistenz jener γ-Strahlung, kann man noch darauf hinweisen, daß die Zuständigkeit einer Retardierungstheorie für dieses Problem recht zweifelhaft ist. Wenn der radioaktive Zerfall im wesentlichen ein quantenmechanischer Übergang durch irgendeinen statischen Potentialberg sein soll, so ist es schwer zu verstehen, daß ein solcher Vorgang in einem statischen Feld durch die endliche Ausbreitungsgeschwindigkeit des Feldes beeinflußt werden kann. Die Frage ist jedenfalls berechtigt, ob eine statische Potentialschwelle dieselbe Rolle (betreffs Retardierung!) spielen könnte, wie z. B. die Wechselwirkung zwischen den Atomelektronen (vgl. die Beispiele in der Arbeit von Heisenberg und Pauli).

In Zusammenhang mit der von Bohr[1]) betonten Schwierigkeit, die durch die Kontinuierlichkeit der β-Strahlspektren für den Energiesatz entsteht, soll hiermit versucht werden, einiges über die Kernelektronen zu erfahren.

Bei den Elementen vom Atomgewicht $4n$ hat Beck[2]) die Regel gefunden, daß die Anlagerung der Kernelektronen in deutlich getrennten Gruppen vor sich geht. Diese Gruppen enthalten je 2, 4, 6, 8, ... Elektronen, wodurch nach Beck[3]) die Annahme eines Drehimpulses

$$\mathfrak{M} = \frac{h}{2\pi} \sqrt{j(j+1)}, \quad j = \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \ldots$$

mit $2j+1$ Einstellungsmöglichkeiten nahegelegt wird. Das Experiment zeigt aber die schon erwähnte interessante Tatsache, daß das Bohrsche Magneton in den Atomkernen verloren geht. Wir sind nun daran gewöhnt, die Existenz vom Spin und Bahnimpuls überhaupt an den entsprechenden magnetischen Momenten zu erkennen. So würde man zunächst einfach sagen, daß die Kernelektronen weder Spin noch Bahnimpuls haben. Wenn man aber bedenkt, daß die als β-Strahlen frei gewordenen Elektronen sicher Spinmomente zeigen, so erscheint es durchaus möglich, daß die emittierten β-Teilchen außer Spin auch noch einen Bahnimpuls (Azimutalquant) bekommen können, obwohl dieser Bahnimpuls im Kern irgendwie unterdrückt war.

Wir müssen darüber klar sein, daß die beiden Tatsachen: die Kontinuierlichkeit der β-Spektren und das Verschwinden des Elektronenmagnetismus im Kern die Reichweite unserer bisherigen Vorstellungen weit überschreiten. Es ist trotzdem zu hoffen, daß die heutige Fassung der Quantenmechanik uns dienlich sein wird, um

1) R. de L. Kronig, Naturwiss. **16**, 335, 1928; W. Heitler u. G. Herzberg, ebenda **17**, 673, 1929.
2) L. Meitner, Physik. Zeitschr. **30**, 515, 1929; G. Gamow, ebenda **30**, 717, 1929.
3) S. Rosseland, Zeitschr. f. Phys. **14**, 176, 1923.
4) L. Meitner, l. c.; C. D. Ellis und W. A. Wooster, Proc. Roy. Soc. London (A) **117**, 109, 1928.
5) W. Heisenberg und W. Pauli, Zeitschr. f. Phys. **56**, 1, 1929.
6) l. c. und G. Beck, Zeitschr. f. Phys. **62**, 331, 1930, S. 342.

1) Vgl. G. Gamow, l. c. S. 719.
2) G. Beck, Zeitschr. f. Phys. **50**, 548, 1928, Fig. 1, S. 552.
3) G. Beck, Zeitschr. f. Phys. **61**, 615, 1930, S. 616.

eine gewisse Umgrenzung der Schwierigkeiten zu erreichen. Im Glücksfall können wir dabei noch quantitative Zusammenhänge finden, deren Hintergrund aber vorläufig noch unklar bleibt.

Jedem Kernelektron[1]), welches nicht in α-Teilchen aufgenommen ist, schreiben wir einen Gesamtdrehimpuls zu. Dieser Drehimpuls wird nach Beck durch die Quantenzahl $j = \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \ldots$ gegeben. Wie schon oben erwähnt, ist der Drehimpuls im Kern unterdrückt, wenn aber ein Elektron einen radioaktiven Kern verläßt, so kommen Spin und Bahnimpuls gleich zum Vorschein. Die Becksche Kurve zeigt, daß die Quantenzahl j die Multiplizität $2j + 1$ hat, ebenso wie bei den Atomelektronen. Einen wesentlichen Unterschied findet man aber in der Gruppierung der Atomelektronen und Kernelektronen. Bei den Atomelektronen entsteht der gesamte Drehimpuls aus Bahnimpuls und Spin durch vektorielle Addition:

$$j = l \pm \tfrac{1}{2}$$

(l = Azimutalquantenzahl).

D. h. jeder Quantenzahl j entsprechen zwei verschiedene Konstellationen:

$$j = l + \tfrac{1}{2} = (l+1) - \tfrac{1}{2}.$$

Auf diese Weise ergeben sich die Stonerschen Besetzungszahlen:

l	0	1		2		3		4		...
j	$1/2$	$1/2$	$3/2$	$3/2$	$5/2$	$5/2$	$7/2$	$7/2$	$9/2$	....
	2	2	4	4	6	6	8	8	10	....

Dagegen finden wir für die Kernelektronen die Beckschen Besetzungszahlen:

j	$1/2$	$3/2$	$5/2$	$7/2$	$9/2$	....
	2	4	6	8	10	....

Daraus folgern wir, daß bei allen Kernelektronen entweder

$$j = l + \tfrac{1}{2}$$

gilt, d. h. Spin und Bahnimpuls nur parallel stehen können, oder

$$j = l - \tfrac{1}{2}, \quad (l \neq 0),$$

d. h. Spin und Bahnimpuls nur antiparallel auftreten. Die Frage ist also, welche der beiden Möglichkeiten verwirklicht ist. Dafür geben die Diracschen Gleichungen einen Wink. Aus den Diracschen Gleichungen des Elektrons folgt[2]) nämlich, daß die Spinkorrektion beim Coulombfeld den Charakter einer (mit der Entfernung rasch abnehmenden) Anziehungs- bzw. Abstoßungskraft hat, je nachdem Spin und Bahnimpuls parallel bzw. antiparallel stehen. Obwohl die Diracschen Gleichungen und das Coulombgesetz in Kerndimensionen nicht mehr gültig sind, scheint die Folgerung ganz natürlich, daß die Aufnahme eines Elektrons in den Kern unmöglich ist, wenn Spin und Bahnimpuls des Elektrons antiparallel stehen, da in diesem Falle die Spinwirkung einer Abstoßung äquivalent ist. So ergibt sich das Becksche Schema der Elektronengruppen im Kern aus dem Pauliprinzip, wobei aber nur die Parallelkonstellation zwischen Spin und Bahnimpuls zugelassen wird. Es gibt also mit $l = 0$ bis $l = 4$ insgesamt

$$2 + 4 + 6 + 8 + 10 = 30 \text{ Elektronen.}$$

Uran enthält 28 freie Kernelektronen (d. h. solche, die nicht in α-Teilchen aufgenommen sind); bei allen radioaktiven Elementen (von Kalium und Rubidium abgesehen) ist die Zahl der freien Kernelektronen über 20. Von den β-strahlenden Kernen werden also die Elektronen mit dem 4. Azimutalquant emittiert.

Betrachten wir nun die auf das Elektron wirkenden Kräfte in Abhängigkeit von dem Kernabstand. In großen Entfernungen kommt nur die Coulombsche Kraft zur Geltung; bei kleineren Entfernungen wird auch die vom Azimutalquant herrührende Zentrifugalkraft wirksam und die beiden sind gerade in den atomaren Dimensionen im Gleichgewicht. In noch kleineren Abständen vom Kern überwiegt die Zentrifugalkraft, welche ja $\frac{l(l+1)}{r^3}$ proportional ist. In der Nähe des Kernradius (welcher bekanntlich durch das Versagen des Coulombschen Gesetzes zwischen einem Kern und einem α-Teilchen definiert wird) ist die Zentrifugalkraft bei dem 4. Azimutalquant etwa tausendmal größer als die Coulombsche Kraft zwischen Elektron und radioaktivem Kern. Was die Eigenschaften der Kräfte im Inneren des Kerns betrifft, liegt kein Anlaß vor anzunehmen, daß die Zentrifugalkraft des Elektrons genau an der Stelle aufhört, wo das Coulombfeld zwischen Kern und α-Teilchen durch eine Kernanziehung aufgehoben wird. Im Gegenteil, schon infolge der verschiedenen Größenordnung ist es zu vermuten, daß die Zentrifugalkraft auch noch im Kerninneren bis zu einer gewissen Tiefe wirksam bleibt. Andererseits ist das Abbrechen der Zentrifugalkraft nicht allein von der Wirkung einer unbekannten „Kernanziehung" zu erwarten, sondern wird durch das Verschwinden des Elektronenmagnetismus im Kern die Folgerung nahegelegt, daß das Potential

1) Die Einschränkung auf die $4n$-Kerne (Beck) ist gar nicht zwingend.

2) P. A. M. Dirac, Proc. Roy. Soc. London (A) **117**, 610, 1928, S. 624, (28) und (28').

der Zentrifugalkraft (welches $\frac{l(l+1)}{r^2}$ proportional ist) im Kerninneren sozusagen von selbst verschwindet, als wenn bei allen Kernelektronen $l = 0$ wäre.

Damit verstehen wir schon das Entstehen der β-Strahlung: im Kerninneren befindet sich das Elektron in einem Potentialkrater, der durch das Abbrechen des Zentrifugalpotentials zustandekommt (Fig. 1). Hat das Kernelektron

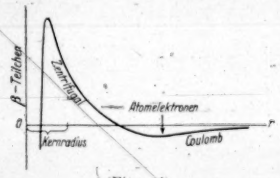


Fig. 1.

eine positive Energie, so ist der Übergang in das äußere Gebiet nach der Wellenmechanik ermöglicht, und die Zerfallswahrscheinlichkeit wird durch den zu überwindenden Potentialberg bestimmt.

Es ist hier angebracht an das Kleinsche Paradoxon[2]) zu erinnern. Klein hat gezeigt, daß das Elektron nach der relativistischen Wellenmechanik sehr hohe und steil ansteigende Potentialberge elektrostatischer Herkunft fast ungehindert durchqueren kann, da nach der relativistischen Beziehung

$$(E - V)^2 - m^2 c^4 = p^2 \qquad (1)$$

(E = Energie, V = elektrostat. Potential, p = Impuls)

Bewegungszustände im klassischen Sinne ($p^2 > 0$) immer möglich sind, wenn

$$|E - V| > mc^2.$$

Mit anderen Worten: bei großem Absolutwert von V soll eine elektrostatische Abstoßung als Anziehung wirken. Diese Folgerung wird von verschiedenen Seiten[3]) als eine wesentliche Unvollkommenheit der relativistischen Formulierung der Quantenmechanik betrachtet. Es soll aber betont werden, daß das Kleinsche Paradoxon durch das Glied $(E - V)^2$ in der relativistischen Energiegleichung (1) bedingt wird. Betrachten wir aber eine „Potential"schwelle V, die in der Energiegleichung nicht mit E additiv, wie in (1), sondern in der Form

$$E^2 - V - m^2 c^4 = p^2 \qquad (2)$$

auftritt, so begegnen wir dem Kleinschen Paradoxon nicht mehr. Z. B. die Diracschen Spinkorrektionen, die in der reduzierten Wellengleichung zweiter Ordnung zum Vorschein kommen, haben gerade diese Eigenschaft (2). Auch das Zentrifugalpotential erscheint in der relativistischen Wellengleichung zweiter Ordnung ebenso, wie V in (2).

Da das Zentrifugalpotential in der Nähe des Kernes vielmal größer ist als mc^2, war es notwendig zu zeigen, daß das Kleinsche Paradoxon uns nicht stören wird.

Für die wellenmechanische Berechnung der Zerfallswahrscheinlichkeit ist der Verlauf des Feldes besonders in der Nähe des Kraters (vgl. Fig. 1) wichtig. Dort wird aber die Diracsche Theorie des Spins ganz illusorisch, da die Reichweite der Diracschen Gleichungen durch den Kernradius sicher begrenzt ist. So bleibt das einzige, aber sehr starke Feld, das man quantitativ berücksichtigen kann, die Zentrifugalkraft. Die Coulombsche Kraft dürfen wir ganz weglassen, da diese — wie oben gesagt — in der Nähe des Kernes etwa tausendmal kleiner ist,

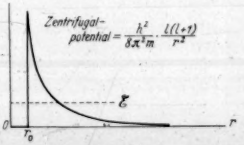


Fig. 2.

als die Zentrifugalkraft, und der Verlauf des Feldes in größeren Entfernungen vom Kern nicht wichtig ist. So wird Fig. 1 für die Rechnung folgendermaßen schematisiert:

Da es nicht möglich ist, die Diracschen Gleichungen heranzuziehen, müssen wir die relativistische Wellengleichung zweiter Ordnung anwenden. Dann gilt für $r < r_0$ (den winkelabhängigen Faktor in der Wellenfunktion lassen wir weg, da es hier ohne Bedeutung ist):

$$\frac{d^2\chi}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{d\chi}{dr} + \frac{8\pi^2 m}{h^2} \cdot E\left(1 + \frac{E}{2mc^2}\right)\chi = 0$$

und für $r > r_0$:

$$\frac{d_2\chi}{dr_2} + \frac{2}{r}\frac{d\chi}{dr} + \left[\frac{8\pi^2 m}{h^2} \cdot E\left(1 + \frac{E}{2mc^2}\right) - \frac{l(l+1)}{r^2}\right]\chi = 0$$

1) Die Bezeichnung „β-Teilchen" links an der Ordinatenachse sollte im Zwischenraum zwischen Ordinatenachse und steil ansteigendem Teil der Kurve stehen und bezeichnet die Stelle, wo Elektronen mit positiver Energie vorhanden sind.

2) O. Klein, Zeitschr. f. Phys. **53**, 157, 1929.

3) Vgl. auch W. Heisenberg und W. Pauli, l.c.

Die Rechnung ergibt eine Formel[1]) für die Zerfallskonstante

$$\lambda = f(E, l, r_0) \qquad (3)$$

in Abhängigkeit vom Azimutalquant l, Kraterradius r_0 und irgendeinem Energiewert E. Diese wellenmechanische Betrachtung gibt natürlich keinen Aufschluß über das kontinuierliche β-Spektrum. Wenn man den Zusammenhang (3) mit der Erfahrung vergleichen will, so muß in jedem einzelnen Fall ein ganz bestimmter Energiewert angegeben werden, da die Zerfallskonstanten nach den Messungen scharf sind. Die Tatsache, daß bei scharf definierter Zerfallskonstante die Zerfallsenergie auf ein großes Gebiet verteilt ist, deutet vielleicht darauf hin, daß das Elektron im Kern einen scharfen Energiewert repräsentiert und die Unschärfe in der Energieabgabe irgendwie bei dem Zerfall zustandekommt, wobei der Energiesatz im Elementarprozeß verletzt wird. Es ist wohl vernünftig anzunehmen, daß dieser scharfe Energiewert des Elektrons im Kern gerade die mittlere Zerfallsenergie ist, wodurch die Erhaltung der Energie statistisch gültig bleibt.

Zuverlässige Angaben über das primäre β-Spektrum liegen nur für RaE vor. Das β-Spektrum von RaE reicht von etwa 200000 bis 1 Million Volt × Elektron. Das Maximum (= wahrscheinlichste Zerfallsenergie) liegt bei 300000 Volt. Die mittlere Zerfallsenergie ist ungefähr 350000 Volt.

In (3) haben wir also $E = 350000$ Volt × Elektron, $l = 4$ und für λ die Zerfallskonstante von RaE (in sec^{-1}) zu setzen. Es ergibt sich dann

$$r_0 = 1,2 \cdot 10^{-13} \text{ cm}.$$

Der Kraterradius r_0 ist also tatsächlich kleiner als der Kernradius.

Merkwürdigerweise ergibt sich fast dieselbe Zahl aus der folgenden einfachen Formel (die nur gefühlsmäßig konstruiert wurde):

$$r_0' = \frac{e^2}{m c^2 + \Delta E}, \qquad (4)$$

wo e = Ladung, m = Masse des Elektrons und ΔE die Breite des β-Spektrums bedeuten. Bei RaE ist ΔE etwa 800000 Volt; so folgt aus (4):

$$r_0' = 1,1 \cdot 10^{-13} \text{ cm}.$$

Durch (4) wird man daran erinnert, daß $\frac{e^2}{m c^2}$ größenordnungsmäßig den Wert des klassischen Elektronenradius darstellt.

Da die bisherigen Erfahrungen über andere β-Spektren sehr mangelhaft sind, können wir eine weitere Anwendung der wellenmechanisch abgeleiteten Formel (3) vorläufig nicht durchführen. Die Formel (4) läßt sich in der heutigen Quantentheorie nicht erklären; wenn sie sich auch in anderen Fällen bewährt, so dürfte man darin eine Äußerung der noch unbekannten Gesetze der Kernphysik sehen.

Berlin, August 1930.

(Eingegangen 25. August 1930.)

1) J. Kudar, Zeitschr. f. Phys. **60**, 168 und 176, 1930.

Über die Schärfe der Beugungsmaxima von Elektronenwellen.

Von Ernst Schöbitz.

Mit Tafel I.

(Kurzer Auszug aus der Prager Dissertation.)

Während bei den ersten Versuchen über Elektronenbeugung nur unscharfe Beugungsmaxima erhalten wurden, konnte man später Beugungsbilder aufnehmen, die die Schärfe röntgenspektroskopischer Aufnahmen erreichten. Es war daher naheliegend, die Schärfe der Beugungsmaxima in Abhängigkeit von den Versuchsbedingungen zu untersuchen. Eine vorläufige Mitteilung von E. Rupp über eine derartige Untersuchung ist während der Ausarbeitung der vorliegenden Arbeit mit ähnlichen Ergebnissen wie diese erschienen[1]). Die zitierte Arbeit bezieht sich auf Oberflächeninterferenzen an Glimmerschichten von 10^{-3} bis 10^{-5} cm Dicke bei Spannungen von 12—62 KV.

Die Schärfe der Beugungsmaxima ist sowohl von Eigenschaften des verwendeten Gitters als auch von den Eigenschaften der Elektronenwelle abhängig. In der folgenden Arbeit wurden von den experimentell erfaßbaren Größen Foliendicke und Wellenlänge variiert und die Schärfe der Beugungsmaxima in Abhängigkeit von diesen beiden Größen gemessen. Die Dicke der verwendeten Goldfolien betrug 10^{-5} bis 10^{-6} cm, die Wellenlänge der Elektronenwellen 0,1 bis 0,04 Å, entsprechend einer Beschleunigungsspannung von 15—100 KV; das verwendete Verfahren entspricht dem Debye-Scherrer-Verfahren bei Röntgenstrahlen.

Versuchsanordnung: In einer Glasapparatur (Fig. 1) wurde ein Glühelektronenstrahl magnetisch aufgespalten; der ausgeblendete, genügend monochromatische Teil durchsetzte die

1) E. Rupp, Naturw. **17**, 875, 1929.

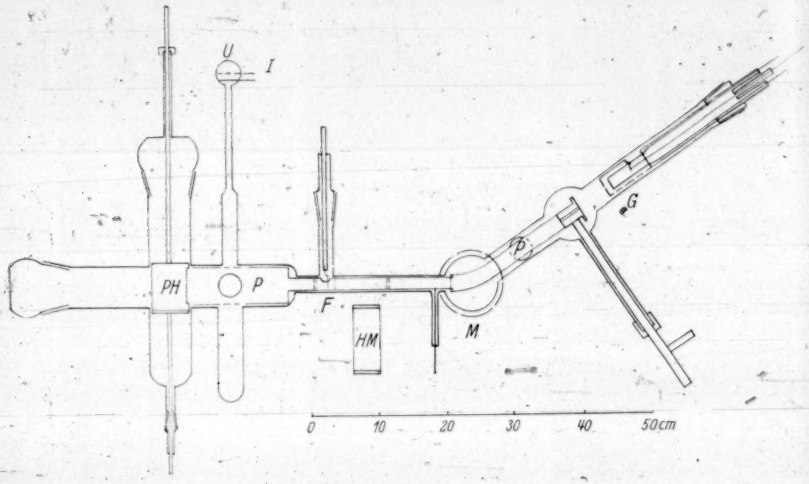


Fig. 1. *G* Glühkathode, *F* Folie, *Ph* Photographische Einrichtung, *M* transversales Magnetfeld, *HM* Hilfsmagnet, *PP* Pumpen.

als Beugungsgitter verwendete Goldfolie. Die entstehende Beugungserscheinung wurde photographisch aufgenommen.

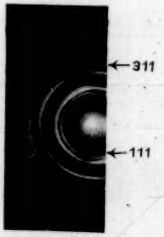
Als Hochspannungsquelle diente eine Siemens-Stabilivoltanlage für Spannungen bis zu 100 KV; die Spannungsschwankungen dürften bei der geringen Stromstärke von 1 MA $^1/_2$ Proz. nicht überstiegen haben. Der verwendete Strahl hatte nach dem Durchgang durch die letzte Blende eine Breite von 0,5 mm; der Abstand zwischen Goldfolie und photographischer Platte betrug 21 cm. Zur Vermeidung störender Wandladungen wurde die Glasapparatur im Innern mit einem zusammenhängenden, geerdeten Wandbelag von Aluminiumblech ausgekleidet. Der Druck im Beobachtungsraume wurde mit einem Ionisationsmanometer gemessen; es konnte als geringster Druck ein Druck von $3 \cdot 10^{-8}$ mm erreicht werden. Um brauchbare Beugungsbilder zu erhalten, war bei der verwendeten Apparatur ein Druck unter 10^{-5} mm erforderlich.

Die verwendeten Folien wurden durch teilweises Auflösen von Blattgold in Kaliumzyanid hergestellt. Es konnten so lochfreie Folien bis zu 10^{-6} cm Dicke erhalten werden. Die Dicken wurden durch Absorptionsmessung mit einem Spektralphotometer nach König-Martens[1]) bestimmt. Bei größeren Dicken enthielten die so hergestellten Folien größere Einzelkristalle eingelagert, so daß das Beugungsbild dann neben den Interferenzringen auch Interferenzpunkte aufweist.

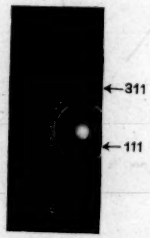
Die photographische Einrichtung (Fig. 2) bestand aus einem im Vakuum mittels Schliff drehbar angeordneten sechsseitigen Messingprisma, auf dessen Seitenflächen fünf photographische Platten im Ausmaße von 53 × 21 mm² und ein Willemitschirm zur visuellen Beobachtung der Beugungsbilder angebracht wurden. Das Prisma war zum Schutz gegen störende Belichtung von einem Messingzylinder umgeben. Belichtet wurden die Platten eine Zehntelsekunde und zwar auf folgende Weise: zunächst wurde das Beugungsbild visuell eingestellt, dann wurde der Elektronenstrahl durch einen Hilfsmagneten so abgelenkt, daß er nicht durch die Blenden gelangen konnte. Unterbrach man dann den Strom im Hilfsmagneten für die angegebene Zeit, so wurde die eingestellte Platte belichtet.

Ausmessung der Aufnahmen: Auf die angegebene Art konnten Beugungsbilder erhalten werden, die bis zu 18 Beugungsringe zeigen. Auf den Aufnahmen konnten sämtliche Maxima gefunden werden, die nach Röntgenstrahlmessungen zulässigen Werten der Gitterparameter (hkl) entsprechen mit Ausnahme von (110) und einigen anderen Maxima, die höheren Werten der Gitterparameter zuzuordnen sind. Das gegenseitige Intensitätsverhältnis der einzelnen Beugungsmaxima ist nicht konstant, sondern hängt von der Dicke der verwendeten Folie ab, wie die Kopien der Aufnahmen 41 und 45 deutlich

1) Ann. d. Phys. **12**, 984, 1903.

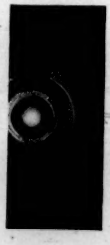


Aufnahme 41.



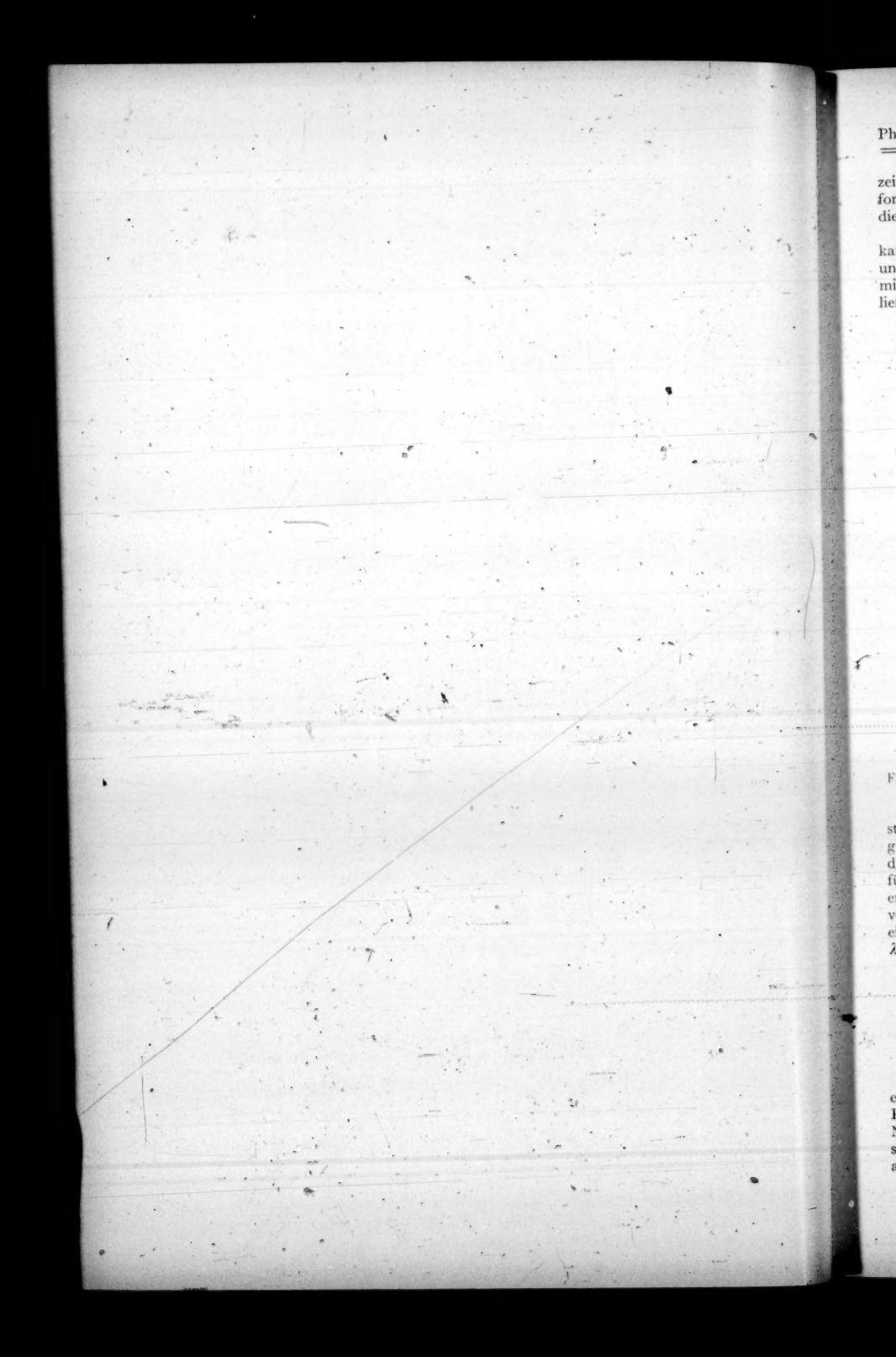
Aufnahme 45.

Aufnahme 36.



Aufnahme 48.

Aufnahme 50.



zeigen (s. Tafel I). Eine Bestimmung des Atomformfaktors ist daher nicht ohne Untersuchung dieser Intensitätsunterschiede durchzuführen.

Als Maß für die Schärfe der Beugungsringe kann man das Verhältnis r/dr, des Ringradius r und der Ringbreite dr ansehen. Beide wurden mittels eines Zeißkomparators ausgemessen; so ließ sich die Ringbreite dr infolge des ziemlich

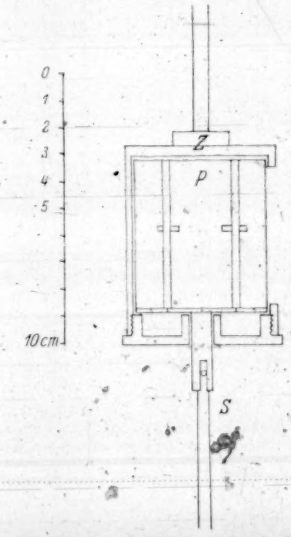


Fig. 2. P Prisma, Z Zylinder, S mittels Schliff drehbarer Stab.

steilen Intensitätsabfalles am Rande des Beugungsringes auf 8 Proz. genau bestimmen. Für die schärfsten Beugungsmaxima erhält man dann für r/dr einen Wert von etwa 30. Da die später erwähnten Fehlerquellen die Ringbreite dr nur vergrößern können, stellt dieser Wert zugleich eine untere Grenze für das Auflösungsvermögen $\lambda/d\lambda$ dar.

Als solche Fehlerquellen kommen in Betracht:

1. die geometrische Form des Elektronenstrahls, insbesondere seine endliche Breite,
2. äußere Störungen, wie das Vorhandensein des Restgases sowie äußerer Felder,
3. die Inkonstanz der Spannungsquelle.

Der Einfluß dieser Fehlerquellen wurde im einzelnen untersucht und gezeigt, daß sie für das Resultat keinen wesentlichen Fehler ergaben. Nur die Breite des Strahles macht sich bei den schärfsten Beugungsmaxima etwas bemerkbar; aus experimentellen Gründen konnte sie jedoch nicht in genügend weiten Grenzen verändert werden.

Resultate: Die Ergebnisse sind folgende:

1. Die Abhängigkeit der Ringschärfe von der Foliendicke ist gering. Eine Herabsetzung der Foliendicke von $8{,}10^{-6}$ cm auf $1{,}5 \cdot 10^{-6}$ cm bewirkt keine deutlich meßbare Änderung der Ringschärfe; dagegen nimmt mit wachsender Foliendicke die Untergrundschwärzung stark zu.

2. Die Abhängigkeit der Ringschärfe von der Wellenlänge ist beträchtlich. Als Beispiel seien hier die Kopien der Aufnahmen 36, 48 und 50 wiedergegeben (s. Tafel I). Die Foliendicke war bei den drei Aufnahmen konstant und betrug $1{,}5 \cdot 10^{-6}$ cm; die Beschleunigungsspannungen P waren bezüglich 37, 52 und 71 KV und aus den Ringradien nach der als gültig vorausgesetzten de Broglieschen Beziehung berechnet. Es ergab sich, daß eine Änderung der Wellenlänge von 0,065 Å auf 0,045 Å eine Abnahme der Ringbreite auf etwa ein Drittel ihres Wertes zur Folge hat.

Zum Schlusse möchte ich Herrn Professor Rausch von Traubenberg für die Anregung zu dieser Arbeit sowie für sein freundliches Interesse während ihres Fortganges danken. Der Notgemeinschaft deutscher Wissenschaft, die die verwendete Siemens-Stabilivoltanlage Herrn Professor Rausch von Traubenberg zur Verfügung gestellt hat, sei ebenfalls an dieser Stelle gedankt.

Prag, im Oktober 1930, Physikalisches Institut der deutschen Universität.

(Eingegangen 20. Oktober 1930.)

Wärmeübergang von tropfbaren Flüssigkeiten in Rohren.

Von M. ten Bosch

L. Schiller und Th. Burbach haben[1]) eine Formel für den Wärmeübergang von tropfbaren Flüssigkeiten in Rohren abgeleitet, die den Vorzug hat, besonders einfach zu sein, nämlich:

$$\alpha \frac{d}{\lambda_w} = 0{,}0395 \left(\frac{u d \varrho c_w}{\lambda_w} \right)^{0{,}75}. \qquad (1)$$

Da nun sowohl die Wärmeleitzahl λ als auch die spezifische Wärme c in dem engen Bereich zwischen Wand- und Flüssigkeitstemperatur nur wenig verschieden sind, so kann die Formel

1) Physik. Zeitschr. **29**, 340, 1928.

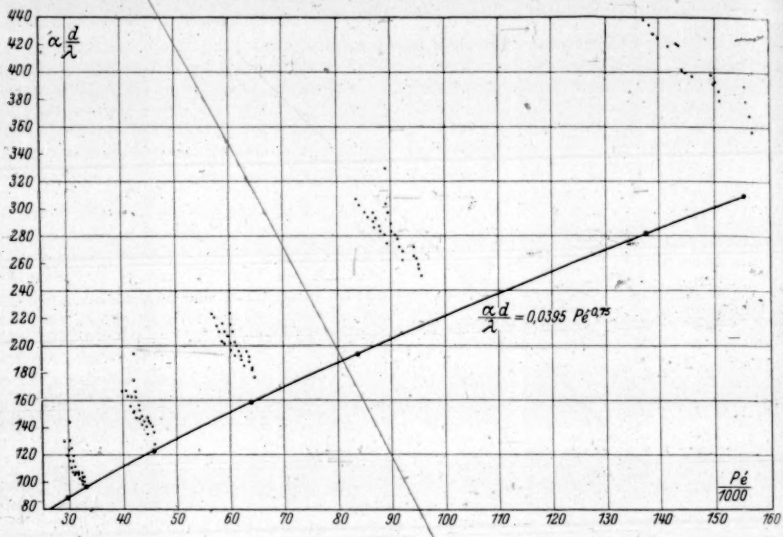


Fig. 1.

(ohne wesentliche Beeinflussung der Genauigkeit) auch geschrieben werden:

$$\alpha \frac{d}{\lambda_w} = 0{,}0395 \left(\frac{u\, d\, \varrho\, c}{\lambda} \right)^{0{,}75} = 0{,}0395\ Pe'^{0{,}75} \qquad (2)$$

wobei $\frac{u\, d\, \varrho\, c}{\lambda} = Pe'$ gesetzt ist. Das ist, mit kleinen Abweichungen, die Nusseltsche Formel, von der wir wissen, daß sie nur für gasförmige Flüssigkeiten mit der Erfahrung übereinstimmende Werte liefert. Versuche von Schiller und Burbach sollen nun aber die Brauchbarkeit der Formel auch für Wasser nachgewiesen haben. Kürzlich sind nun die vollständigen Versuchsergebnisse veröffentlicht worden[1]; sie sind — oberhalb der kritischen Geschwindigkeit — in Fig. 1 eingetragen, woraus zu sehen ist, daß von einer Übereinstimmung zwischen Formel und Versuch nicht gesprochen werden kann. Die große Verschiedenheit der Werte von $\alpha \frac{d}{\lambda}$ bei gleichem Wert von Pe' zeigt auch klar, daß für tropfbare Flüssigkeiten die Wärmeübergangszahlen niemals durch eine einfache Potenz der Péclet schen Zahl darstellbar sind. Noch viel schärfer würde die Unbrauchbarkeit der Formel 1 für tropfbare Flüssigkeiten zum Ausdruck kommen, wenn sie z. B. auf Öl angewandt wird, da sie dann 20 und mehrfach zu große Werte gibt, je nach der Zähigkeit des Öles.

1) Akad. Verlags-Gesellschaft, Leipzig 1930.

Prandtl hat als erster schon im Jahre 1910[1]) aus der Ähnlichkeit der Differentialgleichungen für die Wärmeleitung und für die Flüssigkeitsströmung eine viel allgemeinere Gleichung für den Wärmeübergang abgeleitet, nämlich:

$$\alpha \frac{d}{\lambda} = \frac{\tfrac{1}{2} \psi (Re)}{\sigma - (\sigma - 1) \frac{u'}{u}} \qquad (3)$$

worin $\psi (Re)$ aus dem Druckverlust durch Oberflächenreibung zu bestimmen ist. Für glatte Rohre ist mit $Re = \frac{w d}{\nu}$

$$\psi (Re) = 0{,}0395\ Re^{0{,}75}. \qquad (4)$$

In Gleichung (3) ist u' die Geschwindigkeit an der Grenze der laminaren Schicht und $\sigma = \frac{\lambda}{c \eta}$ eine Zahl, die für tropfbare Flüssigkeiten sehr stark von der Temperatur abhängig ist.

Der Druckverlust wurde bis jetzt allerdings nur bei gleichen Temperaturen der Wand und der Flüssigkeit gemessen, während beim Wärmeübergang immer verschiedene Wand- und Flüssigkeitstemperaturen vorhanden sind. Versuche zur Festlegung einer allgemeineren Gleichung für den Druckverlust wären deshalb von Interesse. Bis solche vorliegen kann in Gl. (3) die Reynolds-

1) Physik. Zeitschr. **11**, 1072/78, 1910.

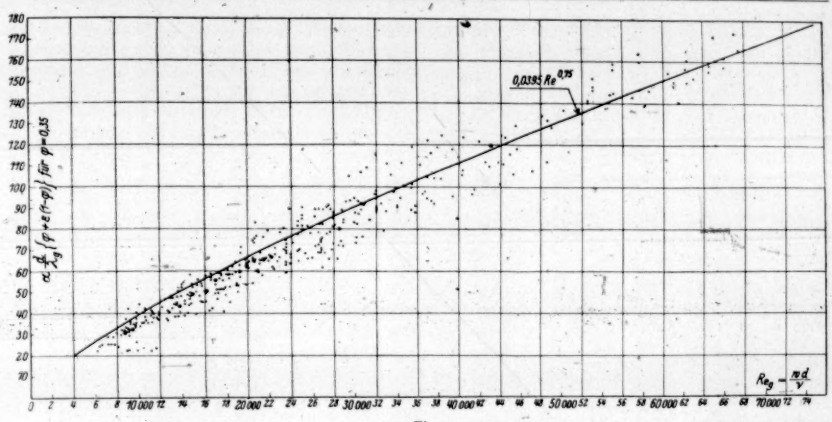


Fig. 2.

sche Zahl für die mittlere Temperatur der Grenzschicht eingesetzt werden, obschon es beim Überwiegen des Energieverlustes im turbulenten Kern vielleicht genauer wäre, die Temperatur ϑ' am Rande der laminaren Schicht dafür zu wählen. Bei der bisher erreichten Versuchsgenauigkeit ist diese Unsicherheit der Gleichung (3) noch nicht zum Vorschein gekommen.

Die Formel von Prandtl ist wenig beachtet worden. Aus den Versuchen von Stender bestimmte ich seinerzeit[1]) den Wert $\frac{u'}{u} = \varphi = 0{,}35$ und leitete weiter ab, daß die Stoffwerte in der Gleichung (3) für die mittlere Temperatur der Grenzschicht einzusetzen sind.

$$\alpha \frac{d}{\lambda_g} = \frac{0{,}0395\, Re^{0{,}75}}{\sigma_g - 0{,}35\,(\sigma_g - 1)} \qquad (5)$$

Die Versuche von Stender sind in Fig. 2 eingetragen und mit der theoretischen Formel (5) verglichen. Die größten Abweichungen zwischen Versuch und Theorie kommen bei kleinen Temperaturunterschieden im Rohr vor. Sie liegen nach meiner Ansicht innerhalb der erreichten Versuchsgenauigkeit, da ein Meßfehler von $0{,}1^0$ C für die Wand- oder für die Flüssigkeitstemperatur bei 1^0 C Temperaturunterschied schon je eine Ungenauigkeit in der Berechnung der Wärmeübergangszahl α von 10 Proz. verursacht, die sich addieren können.

Wenn man bedenkt, daß in Fig. 2 Versuche mit Rohren aus Messing und Eisen von 17 und 28 mm Ø enthalten sind, daß die Wärme von der Wand an das Wasser und umgekehrt übertragen würde, wobei das Wasser sowohl aufwärts als abwärts durch das Rohr strömte, und wenn man beachtet, daß der Maßstab von $\alpha \frac{d}{\lambda}$ in Fig. 2 doppelt so groß als in Fig. 1 ist, so muß man die Übereinstimmung zwischen Theorie und Versuch als durchaus befriedigend ansehen.

Prandtl hat kürzlich seine Formel (2) erweitert[1]), indem er das Verhältnis $\frac{u'}{u}$ aus dem $\frac{1}{7}$ Potenzgesetz der Geschwindigkeitsverteilung berechnet. Er fand

$$\frac{u'}{u} = 1{,}6\left(\frac{ur}{\gamma}\right)^{-\frac{1}{8}} = 1{,}6\left(\frac{Re}{2}\right)^{-\frac{1}{8}} \qquad (6)$$

wobei er die Zahl 1,6 als unsicher ansieht. Berechnet man diesen Faktor aus den Versuchen von Stender, so schwankt sie regellos zwischen 1,03 und 1,36 und rechnet man mit einem konstanten Mittelwert, z. B. 1,2, so ist die Übereinstimmung mit den Versuchen von Stender weniger gut als beim Vergleich mit dem konstanten Wert $\varphi = \frac{u'}{u} = 0{,}35$.

Bei der Ableitung der Formel (6) geht Prandtl von der Überlegung aus, daß laminare Grenz-

1) Z. V. d. I. S. 911, 1926. Wenn man die Veränderlichkeit der Stoffkonstanten mit der Temperatur vernachlässigt, ist meine dort abgeleitete Gleichung mit der Formel von Prandtl identisch. Auf die Identität wurde ich durch den Artikel von A. Sollerio (Physik. Zeitschr. **29**, 309, 1928) aufmerksam gemacht. Damals war ich der Meinung, daß die Dicke der Grenzschicht wesentlich durch die Hauptströmung im Rohr beeinflußt wird. Ich bin aber zur Überzeugung gekommen, daß auch hierfür nur die mittlere Temperatur der Grenzschicht ausschlaggebend ist.

1) Physik. Zeitschr. **29**, 487, 1928.

schicht und turbulenter Kern eine scharfe Grenze haben, die dort liegt, wo die Tangente an der Geschwindigkeitskurve $u = u_{max}\left(\frac{\gamma}{r}\right)^{1/7}$ den Wert annimmt, den er in der laminaren Grenzschicht hat, und der aus der Schubspannung an der Wand berechnet werden kann. Nun hat aber die Kurve $u = u_{max}\left(\frac{\gamma}{r}\right)^{1/7}$ für $y = 0$ eine vertikale Tangente (Fig. 3), während in der laminaren Grenzschicht $\operatorname{tg}\alpha_0 = \frac{du}{dy} = \frac{\tau_0}{\eta}$ einen endlichen Wert hat. Die Tangente an die Geschwindigkeitskurve mit der Neigung α_0 (im

Fig. 3.

Punkte A) gibt an der Wand eine endliche Geschwindigkeit und nicht den Wert Null. Auch gilt das $^1/_7$ Potenzgesetz in der unmittelbaren Wandnähe nicht mehr, wie sowohl aus den Versuchen von Stanton[1]) als aus den Messungen von Nikuradse[2]) folgt (Fig. 4). Der Übergang zwischen Laminarströmung und Turbulenz wird allmählich erfolgen, so daß die Gleichung (6) gegenüber dem experimentellen Wert für $Re >$ ca. 10000 $u'/u = 0{,}35$ theoretisch keinen Vorzug hat. Die Frage ob u'/u von der Reynoldsschen Zahl abhängt, könnte nur durch Versuche entschieden werden, die die Wärmeübergangszahlen mit einer Genauigkeit von 1 Proz. ergeben, d. h. sowohl die Wand- als die Flüssigkeitstemperatur sollte bis auf $0{,}01^0$ C genau gemessen werden. Solange solche Versuche nicht vorliegen, darf die Gleichung (5) als die genaueste allgemeine Gleichung für den Wärmeübergang strömender Flüssigkeiten in Rohren gelten. Dann sollten aber auch die Versuchswerte von Burbach dadurch darstellbar sein. Das ist nun nicht der Fall. Der Grund dafür kann nicht darin liegen, daß (wie Burbach schreibt), er „ein differentielles α gemessen hat, das nur für eine ganz bestimmte Anlauflänge gilt, in Gegensatz zu den sonst

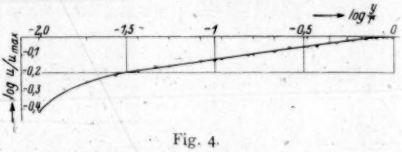


Fig. 4.

üblichen Wärmeübergangszahlen, die Mittelwerte über eine endliche Rohrlänge darstellen".

Bei der vorhandenen großen Anlauflänge ist die Wärmeübergangszahl nur eine Funktion der Temperatur. Seine ergänzte Formel, die die Lage des Meßpunktes berücksichtigen soll

$$\alpha\frac{d}{\lambda} = 0{,}095\, Pe'^{0{,}75}\, e^{0{,}02275\cdot 10^{-4}\frac{gr\cdot d}{z}}$$

worin

$$Gr = \frac{a^3 g\,(T_w - T_{fl})\,\beta}{g^2}$$

und a den Radius des Ausflußgefäßes ist, ist nicht sehr glücklich gewählt. Die Grashofsche Zahl Gr, die Dichteunterschiede berücksichtigt, hat mit der Anlauflänge nichts zu tun. Nach den Untersuchungen von Latzko[1]) ist dafür nur die Reynoldssche Zahl ausschlaggebend. Auch würde aus der Gleichung folgen, daß bei Verdoppelung des Durchmessers des Ausflußgefäßes die Wärmeübergangszahl e^8 mal größer wird!

Die Abweichung der Versuchswerte von Burbach mit der Formel (5) kann nur durch die ungenaue Messung der Temperaturen erklärt werden. Wie groß die Schwierigkeiten der genauen Temperaturmessung sind, folgt z. B. aus folgender Überlegung: Aus der Kontinuität der Wärmeströmung folgt:

$$\alpha\,(\vartheta - \vartheta_w) = \frac{\lambda}{\delta}\Delta\vartheta_w,$$

worin $\Delta\vartheta_w$ das Temperaturgefälle in die Rohrwandung ist. Mit den gemessenen Werten $\vartheta - \vartheta_w = 3{,}6^0$ C, $\alpha = 1{,}53$ cal/cm², s. ^{0} C und mit $\lambda_{messing} =$ ca. 0,25 cal/cm, s. ^{0}C und $\delta = 1$ mm $= 0{,}1$ cm wird

$$\Delta\vartheta_w = \frac{1{,}53}{0{,}25}\times 0{,}1 \times 3{,}6 = 2^0\text{ C}.$$

Da das Thermoelement zur Bestimmung der Wandtemperatur 0,3 mm von der Innenfläche

1) Proc. Röy. Soc. A. **85**, 1911.
2) Mitt. Forsch. Arb. Heft 281 (1926) VDI-Verlag.

1) Z. f. angew. Math. u. Mech. **1**, Heft 4, 1921.

entfernt angebracht war, wurde dadurch die Wandtemperatur um $0{,}3 \times 2 = 0{,}6^0$ C zu niedrig gemessen, was bei einem Temperaturunterschied von 3,6 einen Meßfehler bei der Bestimmung von α von 15 Proz. ausmacht! Durch diesen Fehler wird der Wert von α noch größer, so daß ich vermute, daß auch die Messung der mittleren Flüssigkeitstemperatur nicht einwandfrei war.

Die Beobachtung von Burbach, daß schon der geringe Durchhang des Versuchsrohres von erheblichem Einfluß auf den Wärmeübergang war, überrascht, denn sie steht in Widerspruch mit vielen anderen Beobachtungen.

Zürich, 22. August 1930.

(Eingegangen 24. August 1930.)

Bemerkung zu der vorstehenden Abhandlung von M. ten Bosch.

Von L. Schiller und Th. Burbach.

Soweit sich die Abhandlung von ten Bosch mit unseren Arbeiten beschäftigt, möchten wir dazu folgende Bemerkungen machen:

1. Die Darstellung von Herrn ten Bosch ist insofern irreführend, als sie glauben läßt, daß unsere Formel (Gl. (1) bei ten Bosch) schlechthin gelten sollte. Ihre Gültigkeit wird von uns ausdrücklich auf sehr große Anlauflängen (und niedrige Kesseltemperaturen) beschränkt. Ebenso irreführend ist deswegen die Darstellung der Fig. 1 bei ten Bosch, in der lediglich unsere „Grenzgleichung" eingezeichnet ist.

2. Für endliche Anlauflängen ist von uns ausdrücklich ein Korrekturfaktor angegeben, der außerdem noch den Anfangsstörungen Rechnung tragen soll. Herr ten Bosch wirft diese beiden Sachen — Anfangsstörungen und Anlauflänge — durcheinander. Außerdem passiert ihm gelegentlich dieser Kritik das Mißgeschick, daß er

$$\frac{e^{\delta f}}{e^{f}} = e^{\delta} \text{ statt } e^{\delta f}$$

setzt, was sein Resultat etwa um den Faktor 600 fälscht.

3. Da aus den Darlegungen von Herrn ten Bosch nicht hervorgeht, daß wir auch die erweiterte Gleichung nur mit Vorsicht angewendet wissen wollten, sei hier der letzte Satz aus der Arbeit von Burbach angeführt: „Bei der Verwickeltheit der im Anlaufgebiet herrschenden Verhältnisse kann die hier mitgeteilte Gleichung trotz ihrer dimensionslosen Fassung nur orientierende Bedeutung haben und daher keine universelle Gültigkeit beanspruchen."

4. Der Einfluß des Temperaturquergefälles in der Wand, der von Burbach nicht berücksichtigt wurde, macht nur im extremen Fall den von Herrn ten Bosch berechneten Betrag aus, in den meisten Fällen wird er innerhalb der Meßgenauigkeit liegen.

5. Die von Herrn ten Bosch im wesentlichen aus einer Abhandlung des „Engineering" (Bd. 113 Jahrg. 1923) entnommene Gleichung, in der Herr ten Bosch einen Zahlenfaktor aus Stenderschen Messungen berechnet hat, enthält eine Variable und einen empirischen Faktor mehr als unsere Gleichung und ist ihr dadurch zweifellos überlegen. Trotzdem sind auch ihre Leistungen nicht überwältigend. In Anbetracht dessen, daß ihr empirischer Faktor aus den Stenderschen Messungen ermittelt wurde, ist die Streuung der durch Herrn ten Bosch reduzierten Stenderschen Beobachtungspunkte immer noch sehr groß (siehe Fig. 2 in der Abhandlung von ten Bosch). Noch schlimmer wird dies, wenn man noch die Versuche von Poensgen dazu nimmt[1]), wo bei größen Péclets die systematische Abweichung etwa 150 Proz. beträgt.

6. Ob und wieweit die Burbachschen Messungen korrekturbedürftig sind, darauf soll an dieser Stelle nicht eingegangen werden, da dies im Zusammenhang mit neueren hier ausgeführten Messungen demnächst geschehen wird.

1) Vgl. M. ten Bosch, Die Wärmeübertragung. J. Springer 1927, 2. Auflage, S. 117.

Leipzig, den 25. Oktober 1930.

(Eingegangen 25. Oktober 1930.)

Über einige Fälle diskontinuierlicher Rotationsfelder.

Von Johannes Letzmann.

Mit Tafel II.

Die analytische Behandlung des Rotationsproblems bezieht sich meist auf den stationären Fall, d. h. auf den Fall einer fehlenden lokalen Beschleunigung, was im System der Eulerschen Bewegungsgleichungen ausgedrückt wird durch

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial w}{\partial t} = 0$$

wo u, v, w die Geschwindigkeitskomponenten parallel den 3 Koordinatenachsen bezeichnen.

Sind diese Ableitungen nach der Zeit $\gtrless 0$, d. h. wenn die Rotation beschleunigt erfolgt, werden die Verhältnisse beträchtlich komplizierter.

Den Versuch einer analytischen Behandlung der beschleunigten Rotation finden wir bei H. Lamb[1]), welcher die Verhältnisse eines rotierenden flüssigen Zylinders in starren Wänden betrachtet. Wenn der Zylinder sich aus der Ruhelage unter dem Einfluß der Kräfte

$$\begin{aligned} X &= Ax + By \\ Y &= B'x + Cy \\ Z &= 0 \end{aligned}$$

bewegt, wobei die Z-Achse mit der Zylinderachse zusammenfällt, so können diese Kräfte sowohl eine radiale als auch eine drehende Komponente (in beiden Richtungen) haben je nach dem Wert der konstanten Koeffizienten A, B, B' und C, sowie deren Vorzeichen. Die Geschwindigkeitskomponenten setzt Lamb an mit

$$\begin{aligned} u &= -\omega y \\ v &= \omega x \\ w &= 0, \end{aligned} \qquad (1)$$

wo ω die Winkelgeschwindigkeit bedeutet, — d. h. sie wachsen mit dem Halbmesser, während jede vertikale Bewegungskomponente fehlt. Die Werte

$$\xi = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}\right) = 0$$

$$\eta = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}\right) = 0$$

$$\zeta = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right) = \omega$$

zeigen, daß die hierbei auftretende Rotation nur um die Z-Achse erfolgt. Der Ansatz (1) genügt ferner der Kontinuitätsgleichung

$$\frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} + \frac{dw}{dz} = 0.$$

Die Eulerschen Bewegungsgleichungen, für reibende Flüssigkeiten durch Reibungsausdrücke ergänzt (s. g. Navier-Stokessche Gl.)

$$X - \frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\mu}{\varrho}\Delta u = \frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z}$$

$$Y - \frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\mu}{\varrho}\Delta v = \frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} + w\frac{\partial v}{\partial z}$$

$$Z - \frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\mu}{\varrho}\Delta w = \frac{\partial w}{\partial t} + u\frac{\partial w}{\partial x} + v\frac{\partial w}{\partial y} + w\frac{\partial w}{\partial z},$$

wo $\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$ usw. ist, ergeben im vorliegenden Falle unter Einhaltung der Kontinuität und der Grenzbedingung

$$-y\frac{d\omega}{dt} - \omega^2 x = Ax + By - \frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial x}$$

$$x\frac{d\omega}{dt} - \omega^2 y = B'x + Cy - \frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial y}.$$

Differentiieren wir nun die erste Gleichung nach x, die zweite nach y und subtrahieren diese von jener, so fällt p heraus und wir finden

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{1}{2}(B' - B). \qquad (2)$$

Hieraus folgt nach Lamb: die Flüssigkeit rotiert daher als ein Ganzes um die Z-Achse mit gleichförmig zunehmender Geschwindigkeit, ausgenommen im speziellen Fall, wo $B = B'$, in welchem eine Beschleunigung fehlt.

Durch Versuche läßt es sich jedoch nachweisen, daß hier die Verhältnisse bedeutend komplizierter liegen, schon vor allem durch das Auftreten diskontinuierlicher Beschleunigungsfelder, dann aber auch durch eine Reihe von Singularitäten, die bei positiver und negativer Beschleunigung verschieden sein können.

Wenn wir z. B. ein zylindrisches Gefäß mit einer inkompressiblen Flüssigkeit auf einer Drehscheibe in gleichförmige, oder positiv bzw. negativ beschleunigte Rotation versetzen, so lassen sich die Erscheinungen in der Nähe der Zylinderwände von denjenigen an der ebenen Boden- und Deckfläche gesondert untersuchen.

I. In der Nähe der Zylinderwände überträgt sich die positive Beschleunigung nur im Bereich einer Zylinderzone von zunehmender Stärke auf die Flüssigkeit, so daß zwischen dem ruhenden inneren und einem beschleunigten äußeren Bereich eine zylindrische Diskontinuitätsfläche oder eine schmale Zone mit scharfem Übergang auftrat, die sich stetig zum Mittelpunkte hin zusammenzog (Fig. 4, Tafel II)[1]).

Innerhalb dieser beschleunigten Schicht ließen sich normalerweise 3 Teilzonen mit stetigem Übergang ineinander unterscheiden. Die der Achse zunächst gelegene zeigte eine Haken- oder Schleifenform der Strombahnen, Fig. 1, Abschnitt 1, wobei beim Übergang aus dem Ruhezustand ein Haken beschrieben wurde, worauf flache Bogen und Schleifen miteinander abwechselten. In der 2. Teilzone herrschten

1) H. Lamb, Lehrbuch der Hydrodynamik. Deutsche Ausgabe, S. 34, 1907.

1) Die Abbildungen dieser Schrift sind meiner Arbeit: „Über die Einflüsse positiver und negativer Beschleunigung auf orts-fest rotierende Flüssigkeitssäulen", Gerlands Beiträge zur Geophysik **25**, 360, 1930, entnommen.

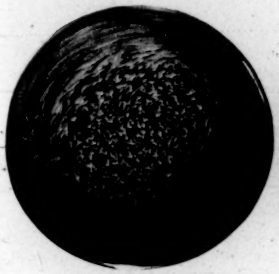


Fig. 4.

Fig. 5.

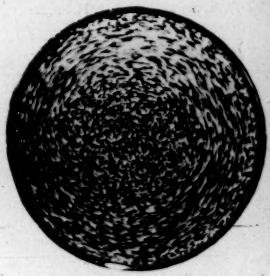


Fig. 6.

Fig. 7.

Fig. 8.

Fig. 9.

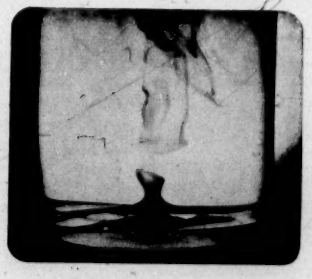


Fig. 10.

fläche Bogen vor, die scheinbar in einem schärferen Knick aneinander grenzten. Die äußerste Zone bestand aus Wellen von geringer Höhe, bis in der Nähe der Gefäßwände annähernd Kreisbahnen beschrieben wurden.

Das Auftreten dieser Schichtung hing dabei nicht vom Absolutwert der Geschwindigkeit, sondern von deren radialem Gradienten $\frac{dc}{dr}$ und dessen Verteilung $\frac{d^2c}{dr^2}$ ab. Sobald dieser einen bestimmten Wert überschritt, kam es in der

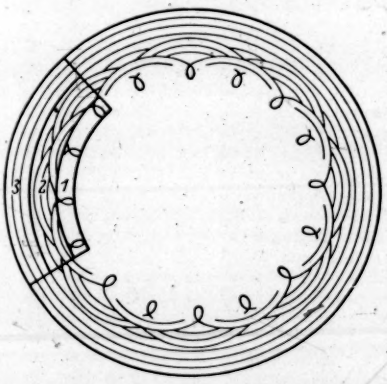


Fig. 1.

Zone des größten Gradienten, meist in der Nähe der Gefäßwände, zur Bildung wirbelartiger Störungen[1]), Fig. 5, Tafel II, die jedoch soweit unregelmäßig waren, daß sich in ihnen geschlossene Kreisbahnen der Teilchen nur selten verfolgen ließen. Diese Störungen stellten keinen stabilen d. h. im gewöhnlichen Sinne turbulenten Bewegungszustand vor, denn sie verschwanden sofort wieder, sobald der normale Gradient hergestellt war, selbst dann, wenn hierbei der Absolutwert der Geschwindigkeit überall gewachsen war.

Ein Übergang in den ausgesprochen turbulenten Bewegungszustand erfolgte jedoch erst in dem Falle, wenn der Gradient der Geschwindigkeit unter einen bestimmten Wert gesunken war; dann wuchsen die Schleifen an der Diskontinuitätslinie beträchtlich an, bis sie sich in einzelne Turbulenzströme, meist von der Gestalt eines *C* (*C*-Ströme) auflösten. Hierbei drang die Bewegung in kürzerer Zeit bis zur Achse vor, als es bei ungestörtem Vorrücken der Diskontinuitätsfläche der Fall gewesen wäre. Dieser ungestörte Fall konnte durch das Einhalten eines bestimmten Gradienten erreicht werden, wobei zuletzt die ganze Säule in eine einheitliche Rotation mit überall gleicher Winkelgeschwindigkeit geriet; in diesem Zustande erfolgte die weitere Rotation beschleunigungsfrei. Meist traten jedoch infolge geringer Unregelmäßigkeiten in der Form oder der Zentrierung der Versuchsgefäße, noch bevor die Diskontinuitätslinie die Achse erreichte, erst eine Verlagerung des Rotationszentrums vom geometrischen Mittelpunkte und darauf ein pulsierendes Umkreisen dieses um jenes auf, bis zuletzt auch hier der beschleunigungsfreie Zustand eintrat.

Durch mehrfaches Steigern der Beschleunigung im gleichen Sinne war es möglich, mehrfache konzentrische Diskontinuitätsflächen der Beschleunigung in derselben Flüssigkeit zu erhalten.

Die Verlagerung dieser Diskontinuitätslinien bei positiver Beschleunigung ließ sich an der Oberfläche mit Hilfe eines parallaktischen Doppellineales bequem messen. Sie erfolgte annähernd linear, Fig. 2a, falls die Winkelgeschwindigkeit des Gefäßes die ganze Zeit über unverändert blieb. Nur in der nächsten Nähe der Wände, d. h. in der eigentlichen Grenzschicht erfolgte die Verlagerung merklich schneller, dagegen in der Nähe der Achse langsamer, als in mittlerem Abstand; hierbei wurden die Messungen in der Nähe der Achse häufig durch die erwähnten Pulsationen gestört.

Der Bewegungszustand innerhalb dieser geführten und beschleunigten Schicht kann auch mit dem laminaren nicht vollständig gleichgesetzt werden, schon weil bei ihm die geordnete Bewegung stets der stabile Zustand war, und weil ein Anwachsen der Kennzahl (Reynoldsschen Zahl) im gewöhnlichen Sinn nicht unmittelbar zum Auftreten des ungeordneten Zustandes führte, auch wenn sie den Wert $R = 1500$ beträchtlich überschritt. Ferner erwies sich die geordnete Bewegung auch bei großen *R*-Werten gegen beliebig große Störungen als stabil.

Obgleich frühere Arbeiten in ähnlicher, wenn auch nicht gleicher Anordnung hier die Möglichkeit eines Überganges von der gewöhnlichen laminaren zur turbulenten Bewegungsform zu bestätigen scheinen, sprechen doch auch neuere Erfahrungen dagegen. So hat A. Mallock (1888) zwecks Bestimmung der Zähigkeit des Wassers Versuche mit zwei rotierenden koaxialen Zylindern gemacht[1]), die M. M. Couette 1899

1) Analog einer Ablösung der Prandtlschen Grenzschicht.

1) A. Mallock, Determination of the Viscosity of water. Proc. Roy. Soc. London **45**, 126, 1888.

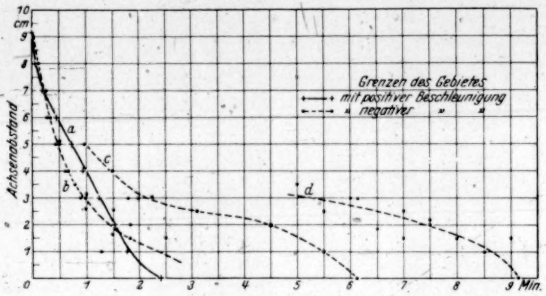


Fig. 2

wiederholte[1]). Wenn hierbei nur der äußere rotierte, ergab sich als Kennzahl $R = \left(\frac{Uh}{\nu}\right)_k = 1990$, wo U die Geschwindigkeit des äußeren Zylinders, h die Dicke der Schicht bedeutet. Andererseits hat jedoch G. J. Taylor[2]) mit der gleichen Anordnung bei ruhendem innerem Zylinder bei den höchsten Umlaufszahlen, welche die Anordnung zuließ, keinen Übergang zur turbulenten Bewegungsform feststellen können, was mit unseren Beobachtungen übereinstimmt. Immerhin dürfte die Versuchsanordnung der genannten Forscher dank der möglichen Reibung am ruhenden Innenzylinder wohl eher zum Auftreten von turbulenten Störungen Anlaß geben als unsere Versuche mit nur einem Zylinder.

Den wichtigsten Unterschied gegenüber gewöhnlichen Strömungen finden wir darin, daß in geführten und beschleunigten Kreisströmungen bei schon aufgetretenen Abweichungen vom geordneten Bewegungszustand eine Vergrößerung der Geschwindigkeit durch Hinzuführen neuer Beschleunigung nicht zur allgemeinen Turbulenz, sondern zum Wiedereintritt der geordneten Bewegung führt.

Die Ursache dieser Erscheinung sehen wir im Zusammenwirken der Zentrifugalkraft und der starren Führung. Die auftretende Normalbeschleunigung, oder genauer ihre Gegenkraft als eine der beiden in Betracht kommenden Komponenten, wächst nach der Formel $B = \frac{c^2}{r}$ mit dem Quadrat der Geschwindigkeit c. Sie ist bestrebt, jeden Bogen, Fig. 1, zu strecken und den Krümmungshalbmesser zu vergrößern, wobei dieser dem Halbmesser des Gefäßes als Grenze zustrebt. Aus dieser dynamischen Vorbedingung müssen die eigenartigen Stabilitätsverhältnisse dieser Schicht hergeleitet werden[1]).

Beträchtlich abweichende Verhältnisse liegen im Fall einer negativen Beschleunigung vor. Wenn wir vom stationären Ausgangszustand einer überall gleichen Winkelgeschwindigkeit in der rotierenden Flüssigkeitssäule ausgehend diese vom Umfange aus negativ beschleunigen, so bildet sich eine Zylinderschicht mit größter Absolutgeschwindigkeit, welche sich zum Mittelpunkt hin zusammenzieht, wobei an der Oberfläche eine entsprechende singuläre Kreiszone sichtbar wird, Fig. 6, Tafel II.

Das Schrumpfen dieser einheitlichen Kreiszone erfolgt jedoch stetig nur etwa bis zur halben Radiuslänge, worauf sie mehr oder weniger deutlich am Ort verharrt. Hier lösen sich einzelne Stromzweige von ihr ab, die sich selbständig der Achse nähern. Allmählich verliert die Zone in dieser Lage verharrend immer mehr und mehr an Deutlichkeit, sie scheint dazwischen zu verschwinden, um nach einigen Sekunden wieder aufzutreten, worauf wiederum eine Annäherung an die Achse erfolgt (vgl. die Zweige b, c und d der Fig. 2, wo der Zweig b die Verlagerung des ersten abgezweigten Teilstromes darstellt).

II. An der ebenen Bodenfläche haben wir es bei positiver und bei negativer Beschleunigung ebenfalls mit verschiedenen Bewegungsfeldern zu tun. Der Fall jener entspricht annähernd dem Problem einer im unendlichen Flüssigkeitsbereich rotierenden Scheibe, wie es durch Th. v. Kármán analytisch behandelt worden ist[2]). Dabei ergab sich eine Divergenz in der

1) M. M. Couette, Etudes sur le frottement des liquides. Annales de chimie et de physique, Serie 6, **21**, 433, 1890.

2) G. J. Taylor, Stability of a Viscous Liquid contained between two Rotating Cylindres. Philos. Transactions **223**, 289, 1923.

1) Die Stabilitätsverhältnisse dieser Schichten sollen in einer weiteren Arbeit eingehender behandelt werden.

2) Th. v. Kármán, Über laminare und turbulente Reibung. Zeitschr. f. angew. Math. und Mechanik **1**, 233, 1921.

Nähe der Scheibe und ein axialer Zustrom aus dem Unendlichen. Die Dicke δ der divergierenden Schicht ist nach v. Kármán im laminaren Fall überall gleich und zwar $\delta = 2{,}58 \sqrt{\frac{\nu}{\omega}}$, wenn $\nu = \frac{\mu}{\varrho}$ das kinematische Zähigkeitsmaß bedeutet. Im turbulenten Fall nimmt die Dicke vom Mittelpunkte aus zu, und $\delta = 0{,}462\, r \left(\frac{\nu}{r^2\omega}\right)^{1/5}$.

In Gefäßen von endlicher Ausdehnung können wir hiermit nur eine qualitative Übereinstimmung erwarten, und das Divergenzfeld muß gänzlich verschwinden, wenn bei dauernder gleichmäßiger Rotation des Gefäßes sein Inhalt zuletzt mit überall gleicher Winkelgeschwindigkeit (beschleunigungslos) rotiert. Diese Divergenz erwies sich somit als in erster Linie bedingt durch eine vorhandene Winkelbeschleunigung und nicht durch den Absolutwert der Geschwindigkeit. Das ebene Divergenzfeld war von der darüberliegenden noch unbeschleunigten Flüssigkeit durch eine Diskontinuitätsfläche oder eine dünne Zone mit großem Geschwindigkeitsgradienten getrennt.

Der Fall einer negativen Beschleunigung der flüssigen Säule durch die Bodenfläche ergab das entsprechende ebene Konvergenzfeld, Fig. 7, Tafel II, dessen Stromfäden in einen axialen

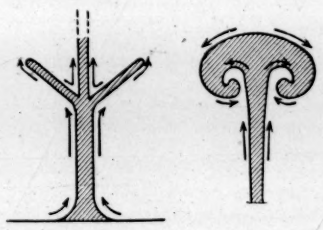


Fig. 3.

aufsteigenden Strom übergingen[1]). Ein Unterschied zeigte sich jedoch im Verhalten des axialen Stromes, der bei positiver Beschleunigung aus mehr oder weniger parallelen Stromfäden bestand, bei negativer jedoch in geringer Höhe über dem Boden eine becherglasähnliche Aufspaltung aufwies, Fig. 9.

Diese Aufspaltung unterscheidet sich wesentlich vom kinematischen Pilzgebilde an der Spitze eines rotationslos vorstoßenden Luftstrahles, das wir als Ausgangszustand zur Abschnürung eines Wirbelringes auffassen können, Fig. 3b. Im Becher des rotierenden Zentralstromes erfolgte kein Umbiegen und Aufrollen der Ränder nach außen, sondern in manchen Fällen deutlich nach innen. Die Strömung scheint auf der Außenseite des Bechers aufwärts, an der Innenseite teilweise nach abwärts gerichtet zu sein, jedenfalls nahm die Fortsetzung des Vertikalstromes ihren Anfang häufig in einer punktförmigen Verdickung am Grunde des Bechers. In einigen Fällen ging dieser Vertikalstrom auch von den Rändern des Bechers, Fig. 10, oder seiner ganzen Innenseite aus.

Wenn eine negative Beschleunigung auf eine Säule einwirkte, in welcher die Rotation sich erst bis etwa zur Hälfte des Radius ausgebreitet hatte, während das ganze Mittelgebiet ruht, so wurde das Konvergenzfeld nach innen hin durch die Lage der Diskontinuitätsfläche begrenzt, die als umhüllende aller Stromlinien diente, so daß ein Gebilde in der Art einer Irisblende entstand, Fig. 8, Tafel II. Das Aufsteigen über dieser singulären Linie erfolgt nun derart, daß es zur Ausbildung einer schalen- oder stundenglasähnlichen Form kommt, wobei beide Gebilde, sowohl der gewöhnliche Wirbelbecher, als auch die Schale, diskontinuierlich in die übergelagerten Flüssigkeitsschichten eindrangen.

Die Bildung des Bechers im rotierend aufsteigenden Strom spielt in der Kinematik der Luftwirbel eine große Rolle: sie läßt sich in z. T. abgeänderter Form im sog. „Fuß" der Wind- und Wasserhosen nachweisen.

Das Ergebnis der angeführten Versuche zeigt, daß es nicht angeht, bei einer analytischen Behandlung des Wirbelproblems die Bedingung der Kontinuität oder die Randbedingungen als im ganzen Bereich geltend anzunehmen, sobald sich es um die Anwesenheit einer positiven oder negativen Beschleunigung handelt.

Dorpat (Estland), 29. Juli 1930.

(Eingegangen 5. August 1930.)

1) In allerletzter Zeit ist eine Arbeit von B. Haurwitz über „Bewegungen von Wirbeln mit vertikaler Achse und endlichem kreisförmigen Querschnitt" in der Zeitschr. f. Phys. **60**, 719, 1930 erschienen. Die analytische Methode führt hier zu einer ganzen Reihe zutreffender Ergebnisse, versagt jedoch sobald es sich um die Erfassung des Einflusses der Bodenreibung handelt und liefert (a. a. O. S. 733) qualitativ das Ergebnis der Lambschen Berechnung.

Theoretische Untersuchungen über die Ablagerung von Staub aus strömender Luft und ihre Anwendung auf die Theorie der Staubfilter.

(Mitteilung aus dem Meteorologischen Observatorium, Potsdam)

Von Fritz Albrecht.

Die Untersuchung der Ablagerung von Massenteilchen aus strömender Luft an festen Gegenständen ist für mannigfache Vorgänge in der Natur und in der Technik von großer Bedeutung. Arbeiten dieser Art wurden vom Verfasser für meteorologische Zwecke (Wassergehaltsmessung von Wolken (1), Untersuchung von Nebelfrostablagerungen (2) und Niederschlagsbildung) schon vor einigen Jahren ausgeführt und werden zur Zeit weiter verfolgt. Die hier vorliegende zusammenfassende Behandlung des Problems stellt die allgemeine physikalische Seite in den Vordergrund. Die Arbeit entstand im wesentlichen durch die Mitarbeit des Verfassers im Fachausschuß für Staubtechnik beim Verein deutscher Ingenieure. Seinem Obmann, Herrn Barkow, Berlin und Herrn Oberingenieur Sell, Brackwede i. W., bin ich für freundliche Unterstützung durch Vermittlung bzw. Überlassung wertvoller, noch unveröffentlichter Versuchsergebnisse zu Dank verpflichtet.

a) Die Staubablagerung aus strömender Luft an Zylindern.

Bei theoretischen Betrachtungen über die Staubablagerung an festen Körpern müssen wegen der Schwierigkeit des Problems zunächst die einfachsten Formen der Ablagerungskörper und Strömungsvorgänge behandelt werden. Als einfachster Fall sei daher die Staubablagerung an einen Zylinder aus einer ihn in Potentialströmung umfließenden Luftmenge behandelt. Hier lauten die Differentialgleichungen für die Bewegung eines kugeligen Teilchens der Masse m und des Durchmessers δ im Felde der Potentialströmung um einen Zylinder des Durchmessers $2R$, wenn v_0 die Geschwindigkeit in unendlicher Entfernung von dem Zylinder und $c = 3 \cdot \pi \cdot 17{,}3 \cdot 10^{-5}$ c. g. s. die Konstante des Stokesschen Widerstandsgesetzes bedeutet:

$$\left.\begin{aligned} m\frac{d^2x}{dt^2} &= c\cdot\delta\cdot\left[v_0\left(1+\frac{R^2(y^2-x^2)}{(x^2+y^2)^2}\right)-\frac{dx}{dt}\right] \\ m\frac{d^2y}{dt^2} &= c\cdot\delta\cdot\left[-v_0\frac{2R^2xy}{(x^2+y^2)^2}-\frac{dy}{dt}\right]. \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

Die exakte Lösung dieser Differentialgleichungen ist allgemein nicht durchführbar. Es müssen also gewisse Annäherungsverfahren entwickelt werden, die dieses Problem dennoch zu lösen ermöglichen.

Das Problem der Ablagerung wurde in grober Annäherung bereits im Jahre 1925 von dem Verfasser zu lösen versucht (1). Es handelte sich damals um die Bestimmung der bei dem Vorbeistreichen von Nebelluft an einem Hygrometerhaare etwa nicht auf dem dünnen Ablagerungszylinder zur Ablagerung gelangenden Wassermenge. Das dort eingeschlagene Verfahren genügte für diesen Zweck, da nur eine größenordnungsmäßige Untersuchung vorgenommen wurde.

Um quantitative Aussagen über die bei der Ablagerung auftretenden Verhältnisse machen zu können, ist es erforderlich, die Bahn des Teilchens in Abhängigkeit von dem Stromfelde genauer festzulegen. Hierfür erwies sich die stückweise Berechnung der Teilchenbahn als geeignet, die eine beliebig hohe Annäherung an die Verhältnisse der Wirklichkeit gestattet. Bei diesem Verfahren werden die Stromlinien jeweils in einem kleinen, in der Bewegungsrichtung des Teilchens liegenden Teil des Stromfeldes als gradlinig, parallel und gleichabständig betrachtet und der Ort und die Geschwindigkeit bestimmt, die das Teilchen erreicht, wenn es mit der ihm am Ausgangspunkt innewohnenden Geschwindigkeit v_0 unter dem zwischen seiner Bewegungsrichtung und der Richtung der Luftströmung liegenden Winkel seitlich in den Luftstrom der Geschwindigkeit w hineingeschossen

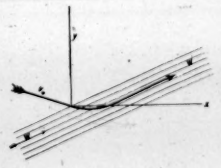


Fig. 1.

wird. In diesem Falle erfolgt die Bewegung des Teilchens in der in Fig. 1 schematisch dargestellten Weise nach den Differentialgleichungen:

$$\left.\begin{aligned} \delta\cdot c\,(w_x - v_x) &= m\frac{dv_x}{dt} \\ \delta\cdot c\,(w_y - v_y) &= m\frac{dv_y}{dt} \end{aligned}\right\}. \quad (2)$$

Die Lösung dieser Gleichungen gibt die Geschwindigkeit des Teilchens im Zeitpunkt t nach dem Eintreten in den Gasstrom an und lautet, wenn noch s das spezifische Gewicht des Teilchens bedeutet:

$$v_x = (v_0^x - w_x)\,e^{-\frac{6\cdot c}{\pi\cdot s\cdot\delta^3}\cdot t} + w_x \quad (2a)$$

und entsprechend für die y-Komponente.

Die nochmalige Integration ergibt den Ort des Teilchens zu der Zeit t mit den Werten:

$$x = w_x t + \frac{\pi \cdot s \cdot \delta^2}{6c}(v_0^x - w_x)\left(1 - e^{-\frac{6c}{\pi \cdot s \cdot \delta^2} \cdot t}\right)$$

$$y = w_y t + \frac{\pi \cdot s \cdot \delta^2}{6c}(v_0 y - w_y)\left(1 - e^{-\frac{6c}{\pi \cdot s \cdot \delta^2} \cdot t}\right), \qquad (2\,b)$$

wobei als Koordinatenanfangspunkt die Eintrittsstelle des Teilchens angesehen wird.

Nach diesem Verfahren kann man nun nacheinander die Orte und die Geschwindigkeiten eines Teilchens auf seiner Bahn in jedem gegebenen Stromfelde berechnen, in dem man die Geschwindigkeit der Strömung, die umgekehrt proportional den Abstände der Stromlinien ist, aus dem Strömungsfelde entnimmt und als Einheit der Geschwindigkeit den in unendlicher Entfernung von dem Körper herrschenden Abstand der Stromlinien mit der dort gegebenen Strömungsgeschwindigkeit in Verbindung bringt. Es ist nun noch notwendig festzustellen, welche Bedingungen erfüllt sein müssen, damit die Teilchenbahnen bei Änderung des Zylinderdurchmessers als ähnlich erscheinen. Bleibt z. B. die Strömungsgeschwindigkeit $v_0 = w_\infty^x$ in unendlicher Entfernung von dem Widerstandskörper ungeändert, ändert sich aber der Durchmesser des Ablagerungskörpers, so ändert sich, wenn man in der Gasströmung Potentialströmung voraussetzt, gleichzeitig lediglich der Maßstab der Stromlinienzeichnung. Da dabei die Geschwindigkeit in unendlicher Entfernung ungeändert bleibt, so wird hier die Zeiteinheit im Verhältnis der Längeneinheitsänderung vermindert. Die Teilchenbahnen bleiben dann in dem neuen Stromfelde denselben im ursprünglichen ähnlich, wenn in (2b) auch δ^2 mit dem Ähnlichkeitsfaktor multipliziert wird. In diesem Falle geht (2b) über in:

$$x \cdot \alpha = w_x \cdot t \cdot \alpha + \frac{\pi \cdot s \cdot \delta^2 \cdot \alpha}{6c}(v_0^x - w_x)\left(1 - e^{-\frac{6c}{\pi \cdot s \cdot \delta^2 \cdot \alpha} \cdot t \cdot \alpha}\right).$$

Ändert sich nun bei dem Übergange von dem einen Zylinder zum andern nicht nur der Zylinderdurchmesser, sondern auch die Strömungsgeschwindigkeit in unendlicher Entfernung von dem Zylinder ($v_0 = w_\infty^x$); etwa dadurch, daß $x = x'' \cdot \alpha$, $w_x = w_x'' \cdot \beta$ und $t = t'' \cdot \gamma$ wird, wobei $\gamma = \frac{\alpha}{\beta}$, so lautet die Gleichung (2b):

$$x \cdot \alpha = w_x \beta \cdot t \cdot \gamma + \frac{\pi \cdot s \cdot \delta^2 \cdot \gamma}{6c}\beta(v_0^x - w_x)\left(1 - e^{-\frac{6c}{\pi \cdot s \cdot \delta^2 \cdot \gamma} \cdot t \cdot \gamma}\right).$$

Diese Betrachtung zeigt, daß man beim Vorhandensein von Potentialströmung berechtigt ist, als ein die Teilchenbahnen in einem vorgegebenen Stromlinienfelde bestimmendes Einheitsmaß das Verhältnis des Produktes aus dem Quadrate des Teilchendurchmessers und der Teilchengeschwindigkeit in unendlicher Entfernung von dem Ablagerungskörper zu einer charakteristischen Abmessungsstrecke des Ablagerungskörpers einzuführen.

In der vorliegenden Untersuchung ist als zweckmäßigste Größe die Weglänge $\bar{x}$ eingeführt, die das Teilchen zurücklegt, wenn es in den mit Gas erfüllten Raum mit der Geschwindigkeit $\bar{v}_0$ hineingeschossen wird. Diese Strecke ist, wie aus (2b) für $v_0^x = v_0$ und $t = \infty$ bei w_x, w_y und $v_y = 0$ gefolgert werden kann:

$$\bar{x} = \frac{\pi \cdot s \cdot \delta^2 \cdot \bar{v}_0}{6 \cdot c}.$$

Als der die Größe und Geschwindigkeit des Teilchens bestimmender Parameter erscheint dann, wie schon in der ersten, diesen Gegenstand betreffenden Arbeit (1) abgeleitet wurde, in der Untersuchung die Größe: $\frac{\bar{x}}{d}$; wo d eine in verschieden großen aber sonst ähnlichen Körpern natürlich homolog zu nehmende Längenabmessung des Körpers ist. Bei Zylindern ist d zweckmäßig gleich dem Durchmesser.

(Ganz gleiche Überlegungen lassen sich auch an den Differentialgleichungen selbst anstellen, doch erscheinen sie in der eben durchgeführten elementaren Betrachtung vielleicht klarer.)

Zur Veranschaulichung des Verfahrens sei hier die Berechnung des ersten Teiles einer Teilchenbahn für ein Staubteilchen in der Nähe eines Zylinders angegeben.

Rechnet man mit einem Teilchen vom Durchmesser $1 \cdot 10^{-3}$ cm und dem spezifischen Gewicht 1, ferner mit $v_0^x = w_\infty^x = 500$ cm/sec, so wird $\frac{6 \cdot c}{\pi \cdot s \cdot \delta^2} = 3100$ c. g. s. und $\bar{x} = 0{,}16$ cm.

Nimmt man nun für diese Teilchenbahn den Wert $\frac{\bar{x}}{d} = 1/2$, so wird der Durchmesser des Ablagerungszylinders $d = 2\bar{x} = 0{,}32$ cm. Man denkt sich nun z. B. das Teilchen auf der linken Seite des in Fig. 2 dargestellten Stromlinienbildes auf der vierten Stromlinie von unten aus gerechnet einströmend mit einer Geschwindigkeit $v_0^x = 500$ cm/sec und $v_0^y = 0$ und berechnet die Koordinaten des Teilchens nach Ablauf der Zeit, die die Luft, die ursprünglich das Teilchen umgab, brauchte, um die Strecke von $x = -3{,}0\frac{d}{x}$,

$y = +0{,}45\,\frac{d}{2}$ bis $x = -2{,}18\,\frac{d}{2}$, $y = +0{,}50\,\frac{d}{2}$ zurückzulegen. Aus der Entfernung und Richtung der Stromlinien ergibt sich $w_x = 0{,}88\,\bar{v}_0 = 440$ cm/sec, $w_y = 0{,}054\,\bar{v}_0 = 27{,}9$ cm/sec. Daraus folgt die Zeit $\bar{t} = 3 \cdot 10^{-4}$ sec und mit diesen Werten aus Gleichung (2b) für die Koordinaten des Teilchens in einem Koordinatensystem, dessen Anfangspunkt $x = -3{,}0\,\frac{d}{2}$, $y = +0{,}45\,\frac{d}{2}$ ist, nach Ablauf der Zeit $\bar{t}$ die Werte $x = 0{,}114$ cm $= 0{,}90\,\frac{d}{2}$ und $y = 0{,}003$ cm $= 0{,}02\,\frac{d}{2}$. Durch Einsetzen dieser Größen in die Gleichung (2a) erhält man ferner die Geschwindigkeit in diesem Punkte zu $v_x = 462$ und $v_y = 17$ cm/sec. Diese Werte bilden den Ausgang für die Berechnung des nächsten Wegstücks des Teilchens. Für dieses kann nach Maßgabe des Stromlinienbildes in Richtung der mutmaßlichen Teilchenbewegung natürlich nur ein wesentlich kleineres Stück des Stromlinienfeldes als geradlinig und äquidistant angesehen werden. Die Berechnung des neuen Wegstückes und aller folgenden geschieht im übrigen in genau gleicher Weise. Die so berechnete Teilchenbahn trifft den Mantel des Zylinders an der Stelle $x = -0{,}648\,\frac{d}{2}$ und $y = +0{,}761\,\frac{d}{2}$ nahezu tangential. Es ist nun leicht und bietet eine gute Kontrolle der eben durchgeführten Rechnung, auch die Teilchenbahn für das gleiche $\frac{x}{d}$ in einem größeren Abstand von der Strömungsachse $y = 0$ z. B. für $y = +0{,}55\,\frac{d}{2}$ zu berechnen. Es zeigt sich, daß ein Teilchen in dieser Anfangslage bereits an dem Zylinder vorbeigeführt wird und nicht mehr zur Ablagerung gelangt. Es läßt sich also für jedes $\frac{x}{d}$ eine Grenzbahn bestimmen, in der das Teilchen gerade noch zur Ablagerung gelangt, während es bei größerem Abstand von der Strömungsachse den Zylindermantel sicher nicht mehr erreicht, bei kleinerem unter allen Umständen sicher an den Mantel herangeführt wird. In Fig. 2 sind die nach diesem Verfahren berechneten Grenzbahnen von Staubteilchen verschiedener $\frac{x}{d}$ um einen Zylinder dargestellt. Aus dieser Darstellung folgt zunächst ohne weiteres, daß mit zunehmendem $\frac{x}{d}$ aus immer größeren Querschnitten Q' der Luftströmung um den Zylinder eine Ablagerung erfolgt.

Staubteilchenablagerung an einen Zylinder.

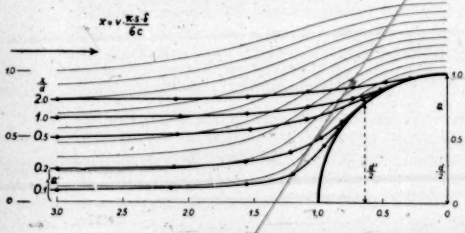


Fig. 2.

Von besonderem Interesse ist weiter die Tatsache, daß mit kleiner werdendem $\frac{x}{d}$ das Gebiet der Ablagerung auf dem Zylinder selbst immer kleiner wird, weil für die sehr flach auf die Zylinderfläche auftreffenden Teilchen große nach auswärts gelegene Teile des Zylindermantels bezüglich der Ablagerung bereits im Schatten des Zylinders liegen. Noch eine dritte Tatsache, auf die hier zunächst nicht weiter eingegangen sei, sei hier erwähnt. Bei gleich großem $\frac{x}{d}$ findet ein Überschneiden der Teilchenbahnen bei der Umströmung des Zylinders in keinem Falle statt.

Die Abhängigkeit des Ablagerungsverhältnisses (des Querschnittes der Stromlinien, aus denen eine Ablagerung stattfindet, zu dem Querschnitt des Zylinders) $\frac{Q'}{Q}$ von der „Charakteristischen Teilchengröße“ $\frac{x}{d}$ ist in Fig. 3 noch

Ablagerungsgesetze für einen Zylinder.

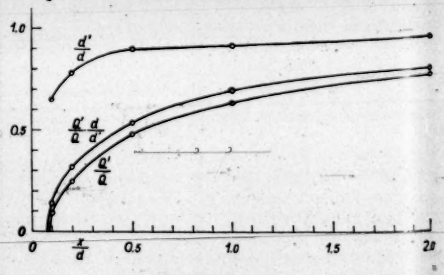


Fig. 3.

einmal dargestellt. In demselben Kurvenblatt ist noch das Verhältnis der „Ablagerungsbreite" d' zu dem Durchmesser des Zylinders d $\left(\text{also } \frac{d'}{d}\right)$, sowie das Produkt $\frac{Q'}{Q} \cdot \frac{d}{d'}$, in Abhängigkeit von $\frac{\bar{x}}{d}$ dargestellt. Die letztere Kurve kann als ein Maß für die mittlere Schichtdicke der Ablagerung angesehen werden, wenn das Ablagerungsprodukt auf der Oberfläche des Zylinders in einer mehr oder weniger dicken Schicht liegenbleibt.

Es mag hier erwähnt werden, daß die Abhängigkeit des Ablagerungsverhältnisses $Q' : Q$ bzw. des Schichtdickenverhältnisses $D' : D = (Q' \cdot d) : (Q \cdot d')$ von $\bar{x}/d$ analytisch durch die Formeln:

$$\left.\begin{aligned} \text{Cof}\,\frac{Q'}{Q} \cdot 5{,}00 &= \frac{\bar{x}}{d} \cdot 0{,}087 \\ \text{bzw.} \qquad \text{Cof}\,\frac{D'}{D} \cdot 4{,}50 &= \frac{\bar{x}}{d} \cdot 0{,}078 \end{aligned}\right| \qquad (4)$$

angenähert dargestellt werden kann. Für das Ablagerungsverhältnis $Q' : Q$ kann auch das Verhältnis $M' : M$ der wirklich abgelagerten Staubmenge M' zu der Staubmenge M eingesetzt werden, deren Ablagerung überhaupt möglich ist, wenn der ganze Durchmesser des Zylinders den Staub auffangen könnte. Leider sind diese transzendenten Gleichungen nicht bequem umkehrbar, so daß sie zur Auffindung von Regeln für die Berechnung der Teilchengröße und des Staubgehaltes in der Raumeinheit Luft bei bestimmten beobachteten Ablagerungen nicht zu benutzen sind. Sehr handlich sind dagegen die folgenden Formeln, die aber erst von $\bar{x}/d = 0{,}15$ an eine brauchbare Annäherung an die Kurven der Fig. 3 geben:

$$\left.\begin{aligned} \frac{M'}{M} = \frac{Q'}{Q} &= \frac{1}{1 + 0{,}53 \cdot \left(\frac{d}{\bar{x}}\right)} \\ \frac{D'}{D} &= \frac{1}{1 + 0{,}44 \cdot \left(\frac{d}{\bar{x}}\right)} \end{aligned}\right| \qquad (5)$$

Hat man nun Beobachtungen an zwei verschieden starken Zylindern d_1 und d_2 erhalten und dort die Ablagerungen M_1' und M_2' bzw. die Schichtdicken D_1' und D_2' gemessen, so ergibt sich aus den eben angeführten Formeln die Größe $\bar{x}$ zu:

$$\bar{x} = 0{,}53 \frac{\frac{M_2'}{d_1} - \frac{M_1'}{d_2}}{\frac{M_1'}{d_1} - \frac{M_2'}{d_2}} = 0{,}44 \frac{d_1 D_1' - d_2 D_2'}{D_2' - D_1'} \qquad (5a)$$

Zur Berechnung der Staubmenge μ in der Volumeneinheit benutzt man die Beziehungen:

$$\mu \cdot v_0 \cdot \left(\frac{M_1'}{M_1}\right) \cdot t \cdot d_1 = M_1' \text{ und } \mu \cdot v_0 \cdot \left(\frac{D_1'}{D_1}\right) \cdot t \cdot d_1 = D_1' \cdot d_1$$

und erhält damit:

$$\mu = \frac{1}{v_0 \cdot t \cdot d_1} \cdot \frac{\frac{1}{d_1} - \frac{1}{d_2}}{\frac{1}{M_1'} - \frac{1}{M_2'}} = \frac{1}{v_0 \cdot t} \cdot \frac{d_1 - d_2}{\frac{d_1}{D_2'} - \frac{d^2}{D_1'}} \qquad (6)$$

Schließlich ergibt sich noch der Teilchendurchmesser zu:

$$\left.\begin{aligned} \delta &= 0{,}041 \sqrt{\frac{M_2' - M_1'}{s \cdot v_0 \left(\frac{M_1'}{d_1} - \frac{M_2'}{d_2}\right)}} \\ &= 0{,}037 \sqrt{\frac{d_1 D_1' - d_2 D_2'}{s \cdot v_0 (D_2' - D_1')}} \end{aligned}\right| \qquad (7)$$

Wie schon erwähnt, gelten diese Formeln jedoch nur für hinreichend kleine Durchmesser der Ablagerungszylinder bzw. für hinreichend große Teilchen. Für die kleinen Werte von $\bar{x}/d$ weichen die Formeln (5) und die Kurve der Ablagerungsmenge in Fig. 3 dadurch voneinander ab, daß erstere allmählich der Null zustreben, während letztere wesentlich stärker abfallen und schon bei $\bar{x}/d = 0{,}09$ die Nullinie erreichen. Hieraus muß geschlossen werden, daß bei sehr kleinen Teilchen eine Ablagerung an dem Zylindermantel überhaupt nicht mehr stattfindet, sondern daß alle Teilchen von der Luftströmung um den Ablagerungskörper herumgeführt werden.

Um auch noch die von der Näherungsformel wesentlich abweichenden Teile der Ablagerungskurve in Fig. 3 nötigenfalls berücksichtigen zu können, kann man wie folgt verfahren: Man bildet aus der Beziehung $\frac{M'}{M}$ bzw. $\frac{D'}{D} = f\left(\frac{\bar{x}}{d}\right)$, für ein vorgegebenes $\frac{d_1}{d_2}$ die Kurve des Verhältnisses der Ablagerungen an beiden Zylindern in Abhängigkeit von $\frac{\bar{x}}{d}$. Führt man dies für die verschiedenen Verhältnisse $\frac{d_1}{d_2}$ der Stärken der Ablagerungszylinder aus, so läßt sich die Beziehung zwischen $\frac{M_1}{M_2}$ und $\frac{D_1}{D_2}$ einerseits und $\frac{\bar{x}}{d_1}$ andrerseits bei den verschiedenen $\frac{d_1}{d_2}$ in zwei Tabellen ausdrücken, die allerdings lediglich für die Werte $\frac{\bar{x}}{d} < 0{,}25$ merklich von den nach den hier mitgeteilten Formeln zu er-

Tabelle I.

$\bar{x}/d$	0,09	0,10	0,15	0,20	0,30	0,40	0,50	0,70	1,00	1,50	2,00
Q'/Q	0,00	0,09	0,19	0,25	0,35	0,43	0,48	0,57	0,65	0,73	0,78
D'/D	0,00	0,14	0,24	0,32	0,41	0,47	0,53	0,61	0,70	0,78	0,81
d'/d	0,00	0,65	0,73	0,78	0,83	0,86	0,88	0,90	0,91	0,93	0,97

rechnenden Werten abweichen. Aus diesem Grunde sind diese Tabellen hier nicht ausführlich angeführt. Wiedergegeben ist hier lediglich der auch in der Fig. 3 dargestellte Zusammenhang zwischen $\frac{Q'}{Q}$, $\frac{Q''}{Q} \cdot \frac{d}{d'} = \frac{D'}{D}$, $\frac{d'}{d}$ und $\frac{\bar{x}}{d}$.

Die Ablagerung von Massepartikeln an Zylindern läßt sich in der Natur als Rauhreifablagerung aus Nebeln an festen Gegenständen bei Temperaturen unter Null Grad beobachten. Derartige Beobachtungen wurden vom Verfasser bereits im Sommer 1926 anläßlich eines von der Notgemeinschaft der Deutschen Wissenschaft und vom Sonnblickverein ermöglichten Aufenthaltes auf dem Hohen Sonnblick in den Hohen Tauern ausgeführt. Eine der dort erhaltenen Ablagerungen an verschieden starken Drähten zeigt Fig. 4 in dreifacher Vergrößerung. Sie wurde am 8. August 1926 von 9^h25 bis 9^h55 bei einer mittleren Windgeschwindigkeit von 10,0 m. p. s. gemessen und entspricht einer mittleren Teilchengröße von $4{,}82 \cdot 10^{-4}$ cm. Die Strecken a und b in der Figur bezeichnen die bei der Beobachtung bestimmten Größen.

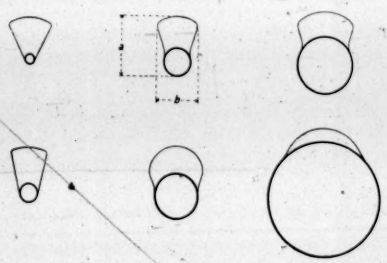


Fig. 4.

Die starke Verbreiterung der Rauhreifablagerung an den kleinen Durchmessern ist hauptsächlich auf die Richtungsschwankung des Windes zurückzuführen und schließt natürlich diese Durchmesser von der Bestimmung der Nebelkonstanten unter den vorliegenden Verhältnissen aus. Die Augenbeobachtungen der Entstehung des Rauhreifes zeigten aber, daß gerade an diesen dünnen Ablagerungszylindern die feinsten Nebelmessungen in sehr kurzer Zeit gewonnen werden können, wenn hinreichend genaue photographische oder optische Methoden zur Bestimmung der Schichtdicke der Ablagerung angewandt werden können. Andererseits bieten die größeren Körper als Ablagerungskörper wiederum den Vorteil, daß man aus der beobachteten Art des Ansatzes der Ablagerung also der Querschnittsverminderung der Ablagerung aus den Rauhfrostbeobachtungen an einem einzigen Gegenstand durch Betrachtung des Verhältnisses $\frac{d'}{d}$ die Größe $\frac{\bar{x}}{d}$ und damit δ und μ bestimmen kann.

b) Die Staubablagerung aus strömender Luft an Filtern.

In der Experimentsphysik und Technik werden für die Staubablagerung aus strömender Luft die Filter benutzt. Die Möglichkeit der theoretischen Erfassung ihrer Wirksamkeit erscheint naturgemäß beschränkt. Um gleichwohl einmal ganz allgemein ihre Eigenschaften betrachten zu können, sei hier eine Einteilung der gebräuchlichen Filtermaterialien versucht. Man kann die Filter zur Ablagerung von Staub aus strömender Luft einteilen in:

1. Faserfilter 2. Netzfilter	Körperfilter
3. Wellblechfilter 4. Kammerfilter 5. Röhrenfilter	Hohlraumfilter

Zu der ersten Gruppe gehören die Werg- und Glaswollefilter, die Filter der zweiten Gruppe bestehen aus einer größeren Zahl von in bestimmten Abständen hintereinander angebrachten Netzen. Beide Gruppen haben die Form der Ablagerungskörper gemeinsam, die im wesentlichen aus als zylindrisch zu betrachtenden Stäbchen oder Fäden bestehen, an deren Oberfläche die Ablagerung stattfindet. Da die Ablagerung bei beiden Gruppen an der Oberfläche von Vollkörpern stattfinden, sind diese Gruppen als „Körperfilter" in eine höhere Gruppe zusammengefaßt. Für beide lassen sich in vielen Fällen die Grundsätze der im vorigen Kapitel beschriebenen Ablagerung an Zylindern, anwenden, besonders wenn die zwischen den Filterfäden liegenden Lufträume, also das Porenvolumen das Volumen der Ablagerungskörper hinreichend weit überschreitet. Es ist dann zulässig, jede der einzelnen Ablagerungsfasern als einen Zylinder an-

zusehen, der von einer durch die Nachbarzylinder nicht gestörten Strömung umflossen wird. Die Ablagerungsvorgänge lassen sich dann für jeden einzelnen dieser Zylinder nach der Ablagerungstheorie unter Abschnitt a) behandeln. Im folgenden seien wenigstens die Grundformeln der Wirkungsweise derartiger Filter angegeben, damit eine spätere experimentelle Nachprüfung möglich wird. Die Bestimmungsstücke derartiger Filter sind die Querschnittsfläche q, die Gesamtlänge l und das Gesamtvolumen $V = l \cdot q$ des Filters. Ferner das Faservolumen V_F und der Faserdurchmesser d. Hieraus folgt durch einfache Rechnung der mittlere Abstand a der einzelnen Ablagerungszylinder, die senkrecht zur Stromrichtung gedacht werden können. Es ist:

$$a = \sqrt{\frac{\pi}{2 \sin \frac{\pi}{4}} \cdot \frac{d^2 \cdot V}{V_F}}. \qquad (9)$$

Für den Fall, daß $a \gg d$. Die Fläche der Netzebene eines Filters ist:

$$F = q \sqrt{\frac{8}{\pi} \cdot \sin \frac{\pi}{4} \cdot \frac{V_F}{V \cdot d^2}}. \qquad (10)$$

Man kann nun annehmen, daß jeder dieser Zylinder einen seinem Durchmesser nach den Ablagerungsgesetzen entsprechenden Teil der Staubmenge abfängt, so daß die staubführende Luft bei ihrem Vordringen in dem Filter immer staubärmer wird. Das Verhältnis der bis zur Länge l' des Filters aus der Raumeinheit Luft abgelagerten Staubmenge μ' zu der tatsächlich in der Luft enthaltenen Staubmenge μ ist gegeben durch die Gleichung:

$$\frac{\mu'}{\mu} = \left(\frac{Q'}{Q} \cdot \frac{F}{q}\right)^{l'} \sqrt{\frac{2 \sin \frac{\pi}{4}}{\pi} \cdot \frac{V_F}{V \cdot d^2}}. \qquad (11)$$

Besonders wichtig ist noch der Hinweis, daß Staubpartikel unter einer gewissen Größe $\left(\frac{x}{d} < 0{,}09\right)$ überhaupt nicht von dem Filter abgefangen werden, sondern ohne weiteres hindurchgelangen. Eine experimentelle Bestätigung dieser hier theoretisch gefolgerten Tatsache ist z. B. die Feststellung von Hirsch (3), daß durch das von ihm benutzte Quarzkörnerfilter Partikeln hindurchgingen, die $< 0{,}5\,\mu$ waren, und von einem dahintergeschalteten Filtrierpapierfilter noch abgefangen und mikroskopisch erfaßt werden konnten. Das Filter von Hirsch muß wegen der engen Lagerung des aus vollen Körnern bestehenden Filtergutes als Röhrenfilter bezeichnet werden. Es ist als solches in einfacher Weise nicht rechnerisch zu erfassen, wie im einzelnen noch später auszuführen sein wird.

Die Filter mit Netzen als den Staub abfangenden Körpern unterscheiden sich von den hier besprochenen Faserfiltern eigentlich nur durch die regelmäßige Anordnung der Fasern in Form von senkrecht zur Strömungsrichtung gestellten Netzen. Sie haben naturgemäß ganz die gleiche nur noch etwas einfacher zu fassende Theorie und brauchen daher hier nicht besonders besprochen zu werden. Besonderer Wert ist noch auf die Tatsache zu legen, daß die Netzfilter im Gegensatz zu den Faserfiltern stets genau reproduzierbar sind.

Die hier zur Berechnung der Körperfilter benutzten Formeln gelten zunächst nur für den Fall, daß Potentialströmung in den Lufträumen zwischen den Ablagerungskörpern vorhanden ist. Es ist dies nun von vornherein durchaus nicht zu erwarten, da die zahlreichen Unterbrechungen des Luftraumes in dem Filter ganz zweifellos die Bildung von Wirbeln begünstigen werden. Auch experimentelle Untersuchungen von Herrn Sell machen das Vorhandensein von Turbulenz in Filtern wahrscheinlich. In welcher Weise aber eine solche Durchwirbelung auf die Ablagerungsgesetze einwirkt, entzieht sich zunächst der theoretischen Forschung. Gerade hierfür besteht bei den soeben behandelten Filtern die Möglichkeit einer eingehenden experimentellen Untersuchung und Prüfung der theoretischen Ergebnisse.

Experimentelle Untersuchungen sind ohnehin bei allen Filtern unbedingt erforderlich, da die Ablagerungsvorgänge auf jeden Fall nur die eine Seite der Filterwirkung erfassen können. Ein jedes Filter wirkt andererseits auch hemmend auf den Luftstrom ein und der günstigste Wirkungsgrad eines Filters wird dann erreicht, wenn bei möglichst geringem Luftwiderstand eine möglichst hohe Staubablagerung aus dem Luftstrom in dem Filter stattfindet.

Eine zweite Hauptgruppe der Filter läßt sich unter dem gemeinsamen Begriff der Hohlraumfilter zusammenfassen. Es sind dies die Wellblechfilter, die neuerdings von Sell in der Patentliteratur beschrieben sind, ferner die Kammerfilter und die Röhrenfilter. Die Wellblechfilter bestehen aus in Wellblechform mit kleinen Wellen gebogenen Blechen, deren eine größere Zahl in einem Abstand etwa gleich der Wellenamplitude einander parallel gelegt wird und die so in die Stromrichtung des Gases gestellt werden, daß der Luftstrom durch die Wellenform des Luftzwischenraumes zwischen den Wellblechwänden selbst zu einer wellenförmigen Bewegung gezwungen wird. Durch die wellenförmige Bewegung werden dann die Staubteilchen aus dem Luftstrom zur Ablagerung gebracht. Diese

Filter sind ebenso wie die Netzfilter genau reproduzierbar. Sie sind ferner in ziemlich großem Umfange theoretisch zu erfassen.

Die Kammerfilter bestehen aus zahlreichen Kammern von unregelmäßiger Gestalt, die hintereinander liegend und durch Spalte miteinander verbunden einen hindurchstreichenden Luftstrom zu vielfachem Umbiegen zwingen, so daß an den Ecken der Kammern eine reiche Staubablagerung stattfinden kann. Diese Filter haben mit den vorhergehenden die Eigenschaft gemeinsam, daß das Wandmaterial beliebig dünn gemacht werden kann, ohne die Wirkung zu beeinträchtigen. In diese Gruppe gehören vor allem die Filter aus Filtrierpapier und die Filter mit Raschigringen. Die letzteren sind reproduzierbar.

Als letzte Gruppe der Filter sind die Röhrenfilter genannt. Diese bestehen aus Stücken aus vollem Material, zwischen denen nur enge Räume meistens in Röhrenform für den Luftstrom übrig bleiben. Wesentlich kennzeichnend ist für sie, daß die Wände meist stark gegen die Luftöffnungen sind, so daß der Filterwiderstand meist recht hoch gegenüber der Ablagerungswirkung ist. Zu diesen Filtern gehören poröse Stoffe, Filz- und Tuchfilter und von den definierten Filtern z. B. die aus Perlen beliebigen Materials bestehenden.

Auf eine Berechnung der Ablagerungswirkung sowohl der Kammerfilter als auch der Röhrenfilter muß in diesem ersten Versuch einer Theorie der Staubfilter verzichtet werden. Doch scheinen die hier entwickelten Anschauungen auch die Möglichkeit zu geben, einmal diese schwierigen Filterformen theoretisch zu erfassen.

Von den letzten drei Gruppen sind lediglich die Wellblechfilter auch theoretisch verhältnismäßig einfach zu behandeln. Zunächst kommt es dabei hauptsächlich auf die Bestimmung der Stromlinienform an. Die Stromlinien in einer wellenförmigen Luftbewegung sind bereits von Kármán anläßlich der Untersuchung der Wirbelstraße hinter einem Hindernis theoretisch behandelt worden. Die Kármánsche Formel lautet:

$$\sin\frac{2x\pi}{l} = \frac{1}{1+e^{c}}\left[\mathfrak{Cof}\frac{2\pi}{l}\left(y-\frac{h}{2}\right) - e^{c}\,\mathfrak{Cof}\frac{2\pi}{l}\left(y+\frac{h}{2}\right)\right] \tag{12}$$

Hierin bedeutet c den die Stromlinie bestimmenden Parameter, l die Entfernung von Wirbelzentrum zu Wirbelzentrum in der Richtung der Wirbelstraße und h die Entfernung der beiden Geraden voneinander, auf denen die Wirbelzentren gelegen sind. Die Wirbel stehen in beiden Wirbelstraßen in gleichem Abstande „auf Lücke". Kármán findet für seine Wirbelstraße Stabilität, wenn $\frac{h}{l} = 0{,}283$ ist. Ein wesentliches Abweichen von diesem Wert verzerrt auch die Stromlinienform außerordentlich. Benutzt man ebenfalls das Verhältnis $\frac{h}{l} = 0{,}283$, so kann man eine der nicht um die Wirbelzentren geschlossenen Stromlinien (also eine mit einem numerisch hinreichend kleinen c (z. B. $c = \pm 1{,}5$) auswählen und als Profillinie der Wellbleche benutzen. Nimmt man dann als Abstand der Bleche den Wert d, der aus der Gleichung folgt:

$$0 = \frac{1}{1+e^{-1{,}5}}\left[\mathfrak{Cof}\frac{2\pi}{l}\left(\frac{d}{2}-\frac{h}{2}\right) - e^{-1{,}5}\,\mathfrak{Cof}\frac{2\pi}{l}\left(\frac{h}{2}+\frac{d}{2}\right)\right],$$

so läßt sich für die Stromlinien zwischen den derartig profilierten Blechen die Formel (12) anwenden. Die auf diese Weise erhaltenen Stromlinien zwischen zwei Wellblechen des Profiles

$$\sin\frac{2x\pi}{l} = \frac{1}{1+e^{+1{,}5}}\left[\mathfrak{Cof}\frac{2\pi}{l}\left(y-\frac{h}{2}\right) - e^{+1{,}5}\,\mathfrak{Cof}\frac{2\pi}{l}\left(y+\frac{h}{2}\right)\right] \tag{13}$$

sind in Fig. 5 dargestellt.

Bei der Berechnung der Teilchenbahnen verfährt man in ganz gleicher Weise, wie bei dem Zylinder. Nur muß hier in dem Ausdruck $\frac{\bar{x}}{d}$ als die Größe des Filtersystems kennzeichnendes Maß an Stelle des Zylinderdurchmessers eine andere Abmessung eingeführt werden. Man kann hierfür zweckmäßig den Abstand der Wellbleche nehmen. Für einige verschiedene mit diesem Maße berechnete $\frac{\bar{x}}{d}$ sind die Teilchenkurven in der Fig. 5 angegeben, und zwar für $\frac{\bar{x}}{d} = \frac{1}{2}$ $\frac{1}{4}$ und $\frac{1}{20}$. Die Kurven zeigen deutlich die zu erwartende Beeinflussung der Teilchenbahnen durch die Luftströmung. Sie bewegen sich oszillierend um ihre ursprüngliche Bewegungsrichtung hin und her. Die Wellenlänge dieser Oszillierungen λ_1 ist dabei in der ersten Schwingung wesentlich größer als die der hin- und herschwingenden Luftbewegung λ_0, die sie verursacht. Aus der Figur geht hervor, daß diese Wellenlängenver-

größerung abhängt von der charakteristischen Teilchengröße $\frac{\bar{x}}{d}$ und daß für die erste Schwingung sehr nahe die Beziehung gilt:

$$\frac{\lambda_1}{\lambda_0} = 1{,}0 + \frac{\bar{x}}{d}. \qquad (14)$$

Außer der Vergrößerung der Wellenlänge ist auch eine Verringerung der Amplitude der

Staubteilchenablagerung an einen Wellblechfilter.

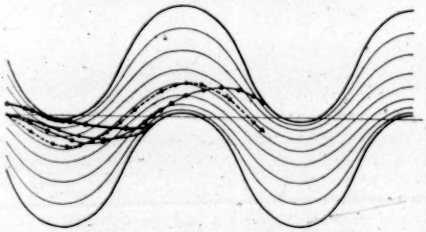


Fig. 5.

Teilchenschwingung gegenüber der Bewegung des Luftstromes zu erwarten und aus der Figur zu entnehmen. Diese Amplitudenverringerung verläuft nahezu invers zu der Wellenlängenvergrößerung, so daß die Beziehung gilt:

$$\frac{A_1}{A_0} = \frac{1}{1{,}0 + \frac{\bar{x}}{d}}, \qquad (15)$$

wenn A_1 die Amplitude der Schwingung der Teilchenbewegung, A_0 die der Luftbewegung bedeutet. Aus der Berechnung der Bahn für ein kleines Teilchen $\left(\frac{\bar{x}}{d} = \frac{1}{20}\right.$ in Fig. 3$\left.\right)$ folgt ferner, daß die größere Wellenlänge der Teilchenschwingung im Anfangsstadium bereits nach wenigen Schwingungen wieder auf die Wellenlänge λ_0 der erregenden Luftströmung abgeklungen ist. Dieser Sachverhalt läßt sich auch an allen Teilchenbahnen nachweisen, deren charakteristische Teilchengröße hinreichend klein ist, so daß die Teilchenbahn durch mindestens zwei Wellen des Filters läuft. Die Vergrößerung der Wellenlänge der Teilchenbahn gegenüber der der Bahn der Luft ist also lediglich als ein Anlaufvorgang zu betrachten, der dem Teilchen eine gegenüber den Luftbahnen phasenverschobene und in den Amplituden verminderte Schwingung aufdrückt. Es besteht also hier bis zu einem gewissen Grade auch eine Analogie zu den mechanischen und elektrischen Schwingungsvorgängen. Praktisch bewirkt dieser Sachverhalt, daß in den letzten Gliedern eines Wellblechfilters eine Ablagerung nicht mehr stattfinden kann, und bildet so in gewissem Sinne ein Analogon zu dem bei der Zylinderablagerung beschriebenen Effekt, daß bei einem sehr kleinem $\frac{\bar{x}}{d}$ eine Ablagerung an dem Zylinder überhaupt nicht mehr zustande kommt.

Die Verminderung der Wellenlänge der Teilchenbahn geschieht nach einer e-Funktion mit dem Dekrement $0{,}4\sqrt{\frac{d}{\bar{x}}}$. Das Verhältnis der Differenz je zweier aufeinander folgender Wellenlängen der Teilchenbahn (λ_1 und λ_2) gegenüber der Wellenlänge der Luftbahn ist demnach:

$$\frac{\lambda_2 - \lambda_0}{\lambda_1 - \lambda_0} = e^{-0{,}4\sqrt{\frac{d}{\bar{x}}}}. \qquad (16)$$

Mit den so erhaltenen Bestimmungsdaten der Teilchenbahnen sind nun hinreichende Anhaltspunkte zur Berechnung der Filterwirkung des beschriebenen Wellblechfilters auf die Staubabscheidung aus einem Luftstrom gegeben. Das Ergebnis ist in der Fig. 6 graphisch dargestellt. In ihr ist die Ablagerungswirkung des Filters (also die vom Filter abgeschiedene Staubmenge

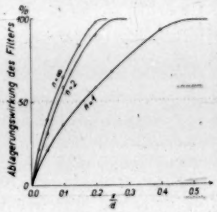


Fig. 6.

in Prozenten der hindurchgehenden) in Beziehung gebracht zu der charakteristischen Teilchengröße $\frac{\bar{x}}{d}$. Eingetragen sind die Ablagerungsmengen in dem ersten Gliede, in den ersten beiden Gliedern und in allen Gliedern eines aus unendlich vielen Gliedern bestehenden Wellblechfilters. Die Kurven zeigen deutlich, daß fast die ganze Staubmenge unter den hier angenommenen Voraussetzungen in den ersten beiden Gliedern (Vollschwingungen) des Wellblechfilters abgelagert wird.

Die bisherigen durch sehr instruktive Experimente von Herrn Dipl.-Ing. Sell in Wellblechfiltermodellen erhaltenen Ablagerungen, für deren

freundliche Überlassung auch an dieser Stelle bestens gedankt sei, zeigen nun bei den bisher benutzten Profilen, die allerdings nicht genau mit den hier theoretisch behandelten übereinstimmen, zwar eine Häufung der Ablagerung in den ersten Wellen, aber nicht eine derartig starke Zusammendrängung des abgelagerten Staubes in den ersten Filtergliedern, wie es dieser Theorie entspräche[1]). Weitere Untersuchungen mit genau entsprechenden Profilen würden erst die Frage entscheiden können, ob diese Abweichung am Profil oder an der Theorie liegt. Eine Abweichung des Experimentes von der Theorie ist nämlich dann zu erwarten, wenn die Voraussetzung der Potentialströmung nicht mehr erfüllt ist, wenn also die Strömung durch das Filter turbulent ist. In diesem Falle müssen die Stromlinien im Filter wesentlich einfacher, nämlich als äquidistante Kurven der Gestalt der Wellblechprofile angenommen werden. Auf die Bewegungen der einzelnen Turbulenzkörper braucht dagegen in vielen Fällen keine Rücksicht genommen zu werden. Sie werden wenigstens größere Teilchen wohl zu Schwankungen ihrer Geschwindigkeit und Bahnrichtung veranlassen, aber als sehr kleine schnell wechselnde Luftgebilde nicht wesentlich aus ihrer Bahn bringen, die von der mittleren translatorischen Luftbewegung bestimmt wird. In diesem ersten Versuch einer physikalischen Theorie der Luftfilter sei auf diese komplizierteren Zusammenhänge zunächst nur verwiesen.

Zusammenfassung.

Die Vorgänge bei der Staubablagerung aus strömender Luft werden theoretisch zunächst an Zylindern untersucht. Die hierbei erhaltenen Ergebnisse werden formelmäßig dargestellt und ihre experimentelle Prüfung an Nebelfrostablagerungen an Zylindern kurz besprochen. Die durch diese theoretischen Untersuchungen gefundenen Beziehungen werden auf die Verhältnisse bei Staubfiltern angewandt. Die Eigenschaften der verschiedenen Filterarten werden besprochen und zwei von ihnen: die Faserfilter und die Wellblechfilter, theoretisch untersucht. In allen Fällen wird, um zunächst einmal überhaupt theoretisches Material zu schaffen, Potentialströmung vorausgesetzt. Auf die bei Turbulenz zu erwartenden anderen Verhältnisse wird zuletzt kurz hingewiesen.

1) Andererseits zeigen alle Filter, besonders auch die erwähnten Röhrenfilter von Hirsch mit Quarzkörnern als Filtergut, deren gewundene Röhrengänge im Sinne dieser Theorie wie die Windungen eines Wellblechfilters wirken werden, eine fast ausschließliche Anhäufung der Ablagerung in den ersten Filterschichten.

Literatur.

1) F. Albrecht, „Das geheizte Haarhygrometer als Meßgerät des Wassergehaltes von Wolken und Nebeln.“ Met. Zeitschr. 1925, S. 468.
2) — „Wolkenuntersuchungen und Rauhreifbeobachtungen auf dem Sonnblick im Sommer 1926.“ XXXV. Jahresbericht des Sonnblickvereins 1926, Wien 1928.
3) J. Hirsch, „Zur Methodik der Rußbestimmung.“ Zeitschr. für Hygiene und Infektionskrankheiten, Bd. 110, H. 2, S. 399, 1929.
4) Th. v. Kármán, Über den Mechanismus des Flüssigkeits- und Luftwiderstandes.“ Nachr. d. Ges. d. Wiss. Göttingen 1911—12. — v. Kármán u. Rubach, Physik. Zeitschr. 13, 49—59, 1912.

(Eingegangen 22. Juli 1930.)

Zwei akustische Vorlesungsversuche.

Von Josef Zahradníček.

1. Interferenz der Schallwellen.

Zu diesem Zwecke dienen verschiedene Apparate, z. B. eine Chladnische Klangfigurenplatte mit dem Quinckeschen Gabelrohr, eine tönende Gabel, die vor einem abgestimmten Resonator um ihre Symmetrieachse gedreht wird, das Stefan-Quinckesche Interferenzrohr in Verbindung mit einer Kundtschen oder Rubensschen Röhre u. a. Am klarsten zeigt man einem größeren Auditorium die Interferenz der Schallwellen, wenn man sich der Stefan-Quinckeschen Interferenzröhre in Verbindung mit einer kleinen Pfeife als Tonquelle und einer empfindlichen Flamme als Schallwellendetektor bedient. Dabei ist der Oszillator und der Resonator der Schallwellen durch die Mauer zweier Nachbarräume getrennt.

Die Idee des Versuches ist dieselbe, wie bei dem von Herschel vorgeschlagenen und von Nörrenberg durchgeführten Versuche[1]); der Unterschied ist nur der, daß beim Nörrenbergschen Versuche nur ein einziger Ton angewendet werden kann und die interferierenden Wellen nur mit einer einzigen Phasendifferenz gezeigt werden können.

Unsere Versuchsanordnung ist folgende (Fig. 1): In eine Wand, welche zwei Räume voneinander trennt — Hörsaal und Vorbereitungszimmer — ist ein Rohr R (3 cm im Durchmesser) horizontal in der Höhe etwa 150 cm eingemauert. Im

1) Müller-Pouillets Lehrbuch der Physik, 10. Aufl., I, 720, Braunschweig 1906.

Hörsaale ist mit dem eingemauerten Rohre das Quincke-Stefansche Interferenzrohr eng verbunden; das andere Ende des Interferenzrohres ist mit einem zylindrischen Ansatz ($2r = 7$ cm) versehen. In einer Entfernung von 1 m ist vor das Interferenzrohr eine empfindliche Flamme F

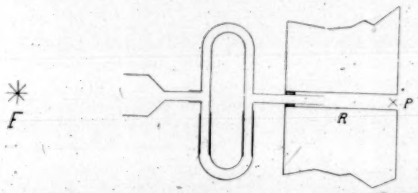


Fig. 1

gestellt, z. B. in der vom Autor in dieser Zeitschrift[1]) beschriebenen Form, die für jeden Gasdruck verwendbar ist.

Lassen wir nun die Schallquelle — eine kleine gedeckte Pfeife P (2 cm lang), die im Vorbereitungszimmer in das eingemauerte Rohr eingeschoben ist, mittels eines Motorgebläses ertönen. Durch Verlängern des beweglichen Schenkels des Interferenzrohres kann man auf Maxima und Minima der aus der Interferenz resultierenden Welle einstellen, was man auf der empfindlichen Flamme und zugleich auch mit dem Ohre gut wahrnehmen kann. In Minimis des Grundtones hört man freilich noch die weit schwächeren Obertöne der Pfeife, besonders den nächstliegenden Oberton.

2. Resonanzkurve eines Resonators.

Die Resonanzkurve eines Resonators kann vorteilhaft mittels der Rayleighschen Scheibe, die nach Grimsehls[2]) Vorgang mit dem Resonator in Verbindung steht, gut aufgenommen werden. Zu diesem Zwecke kann folgende Anordnung getroffen werden: Den Resonator bildet ein an einem Ende offenes, am anderen geschlossenes Messingrohr, 22 cm lang, 4,8 cm inneren Durchmessers. Das Rohr ist horizontal an einem Dreifußstativ befestigt, das mit drei Stellschrauben versehen ist. Nahe dem offenen Resonatorende ist mit dem Resonatorrohr ein 2,2 cm weites und 23 cm langes Rohr vertikal verbunden, das mit einem Drehkopf versehen ist und einen Aufhängefaden aus Platin-Iridium 18 cm lang und 0,016 cm im Durchmesser mit einem Spiegel und der zur Resonatorachse schräg aufgehängten Rayleighschen Scheibe trägt. Die Rayleighsche Scheibe wird von einer dünnen Deckglasplatte 8 mm im Durchmesser gebildet. Das Resonatorrohr ist von dem vertikalen Rohre durch zwei kurze zylindrische Ansätze bis auf eine kleine

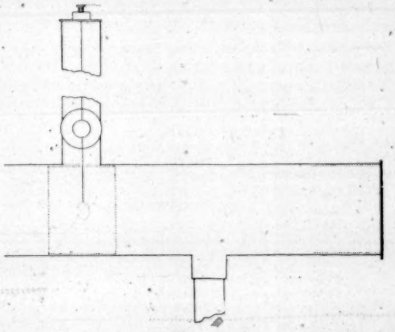


Fig. 2

Öffnung von 2 mm im Durchmesser getrennt. Das übrige ist aus dem Nebenbilde ersichtlich (Fig. 2).

In der Nähe des Resonators lassen wir eine passende Schallquelle ertönen; sei es z. B. eine Stimmgabel von $N = 435$ Hertz mit der Elektronenröhre erregt, bzw. noch mit einem einstufigen Niederfrequenzverstärker mit Lautsprecher-Eccles[1]) (Fig. 3). Mit einem Fernrohr lesen wir die

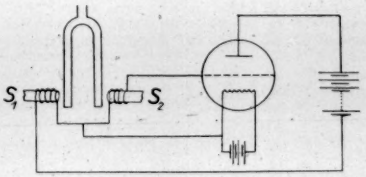


Fig. 3.

zugehörige Ablenkung der Rayleighschen Scheibe ab, am besten von einem Nebenzimmer aus, durch ein in die Mauer eingesetztes Rohr. In zwei Minuten ist die Ablenkung der Rayleighschen Scheibe auf 0,5 mm konstant, wenn die Intensität der Schallquelle, d. h. der Heizstrom und die Anodenspannung konstant und wenn das akustische Feld vollkommen störungsfrei bleibt. Die Anwesenheit des Experimentators in demselben Laboratorium, wo die Rayleighsche Scheibe aufgestellt ist, — die Bewe-

1) Physik. Zeitschr. **30**, 555, 1929.
2) Wied. Ann. d. Phys. **34**, 1028, 1888.

1) Wien-Harms, Handbuch der Experimentalphysik I, 52, Leipzig 1926. — In dem Gitterkreise und Anodenkreise sind Selbstinduktionen S_1, S_2 — die Elektromagnete aus einem Kopfhörer von 2000 Ohm Widerstand.

gung des Kopfes, der Hände — ändert das akustische Feld stark ab, wie man sich leicht überzeugen kann.

Die Länge des Resonators wurde beim Tone a^1 in den Grenzen zwischen 20,8 cm bis 17,3 cm geändert. Der Abstand Spiegel-Skale betrug 225 cm. Die Temperatur war 17,5° C. Folgende Tabelle enthält eine Messungsreihe[1]) bei voller Öffnung des Resonators.

Tabelle I.

Verlängerung des Resonators cm	Länge des Resonators cm	Ablenkung der Scheibe cm
0,00	17,30	3,2$_5$
0,50	17,80	5,7$_0$
0,90	18,20	11,4$_5$
1,05	18,35	16,7$_0$
1,15	18,45	20,1$_5$
1,20	18,50	22,8$_5$
1,25	18,55	26,8$_0$
1,30	18,60	30,7$_0$
1,35	18,65	34,2$_0$
1,40	18,70	40,2$_5$
1,45	18,75	47,6$_5$
1,50	18,80	55,2$_0$
1,55	18,85	61,5$_0$
1,60	18,90	65,6$_0$
1,65	18,95	71,6$_5$
1,70	19,00	74,7$_5$
1,75	19,05	73,7$_0$
1,80	19,10	70,9$_5$
1,85	19,15	66,2$_0$
1,90	19,20	60,6$_5$
1,95	19,25	54,7$_0$
2,00	19,30	49,5$_0$
2,05	19,35	43,5$_5$
2,10	19,40	40,4$_0$
2,15	19,45	37,0$_5$
2,20	19,50	33,5$_0$
2,25	19,55	28,6$_5$
2,30	19,60	25,9$_5$
2,40	19,70	21,8$_0$
2,50	19,80	15,5$_5$
3,70	20,00	10,2$_5$
2,90	20,20	8,8$_0$
3,50	20,80	4,4$_5$

Die beigelegte Resonanzkurve enthält die Ablenkung der Scheibe als eine Funktion der Länge des Resonators (Fig. 4).

Wenn man die Öffnung des Resonators durch passende Blenden verkleinert — andere Dämpfung —, dann werden die Resonanzmaxima kleiner und zu kleineren Längen des Resonators verschoben, wie aus der nächstfolgenden Tabelle ersichtlich ist. Die Flächen der Blendenöffnungen wurden dabei im Verhältnisse 5 : 4 : 3 : 2 : 1 gewählt.

Von den übrigen Messungen mit der Rayleighschen Scheibe erwähnen wir nur noch,

1) Ausgeführt von Herrn F. Nimrichter.

Tabelle II.

Blendendurchmesser cm	Maximale Scheibenablenkung cm	Resonatorlänge bei Maximum cm
4,8	74,7$_5$	19,00
4,3	70,2$_5$	18,60
3,7	64,5$_0$	18,30
3,0	51,6$_0$	17,65
2,2	30,7$_5$	16,30

daß durch passende an beiden Enden benützte Ansätze die Resonatorlänge konstant erhalten

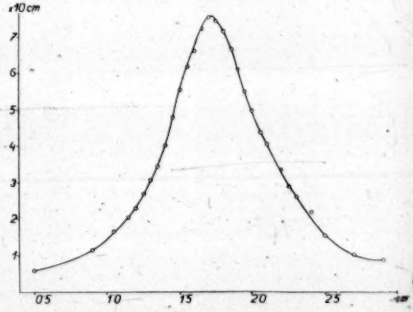


Fig. 4.

werden kann — bei dem Tone a^1 .... 19,00 cm —, daß aber dabei die Rayleighsche Scheibe an verschiedene Stellen des Resonators kommt. Die

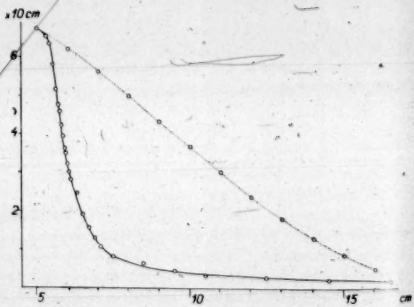


Fig. 5.

zugehörigen Ablenkungen sollten der Theorie[1]) nach eine Funktion von der Form

$$y = A \cos^2 \frac{2\pi x}{\lambda}$$

1) W. König, Wied. Ann. **43**, 43, 1891; Geiger-Scheel, Handb. d. Phys. **8**, 572, Berlin 1927.

erfüllen. Der Vergleich beider Kurven, die wir da ohne die zugehörigen Messungen anführen — Fig. 5 — weist darauf hin, daß die Ablenkung der Rayleighschen Scheibe von dem freien Ende des Resonators angefangen weit schneller abnimmt, als es der Verteilung der Geschwindigkeit längs einer Viertelwelle entspräche. Aus diesem Grunde eignet sich die Rayleighsche Scheibe in Verbindung mit einem Resonator nur zu relativen Messungen.

Zusammenfassung.

Es werden zwei akustische Versuche beschrieben:

1. Interferenz der Schallwellen wird mittels der Stefan-Quinckeschen Interferenzröhre in Verbindung mit einer Pfeife und einer empfindlichen Flamme gezeigt; dabei sind der Oszillator und der Resonator der Schallwellen durch eine Mauer zweier Nachbarräume voneinander getrennt.

2. Resonanzkurve eines Resonators wird mittels der Rayleighschen Scheibe, die in Verbindung mit dem Resonator benützt wird, aufgenommen. Dabei wurden die Ablenkungen der Scheibe von einem Nachbarzimmer durch ein in die Mauer eingesetztes Rohr mit Fernrohr abgelesen; so wird das akustische Feld im Raume der Scheibe durch den Experimentator nicht gestört. Für einen unveränderten Ton wurde die Resonanzkurve des Resonators aufgenommen — in der Abhängigkeit von der Länge des Resonators bei unveränderter Lage der Rayleighschen Scheibe. Auch wurde das akustische Feld im Resonator mittels der Scheibe durchgemessen — in der Abhängigkeit von der Lage der Scheibe im Resonator bei gleichbleibender Länge des Resonators.

Brünn, Physikal. Institut der Masaryk Universität.

(Eingegangen 18. September 1930.)

BESPRECHUNGEN.

W. Wien und F. Harms, Handbuch der Experimentalphysik. IV. Band. Hydro- und Aerodynamik. 3. Teil. Technische Anwendungen, hrsg. von L. Schiller. Gr.-8°. X u. 557 S. mit 269 Abb. Leipzig 1930. Akademische Verlagsgesellschaft m. b. H. Geh. RM 53.—, geb. RM 55.—.

Bei der Würdigung der technischen Anwendungen von Hydro- und Aerodynamik möchte ich an die Karlsruher Hochschulreform anknüpfen, die als einen ihrer Leitgedanken die Ergänzung des Unterrichts durch Übungsarbeiten aufstellt, die nicht „Schulbeispiele" behandeln, sondern aus der lebendigen Praxis genommen sind. Von allen, die den technischen Anwendungen erhöhte Bedeutung beilegen, wird das Erscheinen des 3. Teiles der von L. Schiller redigierten Hydro- und Aerodynamik lebhaft begrüßt werden, weil darin eine geschickte Zusammenstellung von allem Wissenswerten fertig vorliegt, das man sonst mühsam aus Einzelveröffentlichungen zusammensuchen mußte.

Da ein wesentliches Anwendungsgebiet der Hydro- und Aerodynamik — die Luftfahrt (vom Freiballon abgesehen) — erst etwa eine Generation alt ist, so darf es nicht wundernehmen, wenn an manchen Stellen auf noch ungelöste Probleme hingewiesen wird. Dies scheint mir insofern verdienstvoll, als Anregungen bei der Verbreitung, die das Buch sicherlich finden wird, auch in Kreise getragen werden, die den technischen Anwendungen bisher ferner gestanden haben. Die Luftfahrt wird in den Kapiteln von Emden über den Freiballon, von Klemperer über Luftschiff-Meßtechnik, von Hopf über Flugzeuge und Versuche im Fluge und von Flachsbart über Luftschrauben behandelt.

Die außerordentlich intensive wissenschaftliche Entwicklung der Aerodynamik hat auch auf verwandte Gebiete befruchtend gewirkt und zwar auf Pumpen- und Turbinenbau einerseits und Schiffbau andererseits, Gebiete, welche auf eine sehr lange technische Entwicklung zurückblicken können. Ersteres wurde für die Zwecke des Handbuches von Spannhake bearbeitet, während Horn die im Rahmen einer Experimentalphysik interessierenden Schiffsschleppversuche behandelt.

Den Schluß des Buches bilden die Kapitel von Gaede über Luftpumpen und von v. Eberhard über Ballistik.

Die einzelnen Kapitel sind grundsätzlich so aufgebaut, daß einer Beschreibung der gebräuchlichen industriellen Ausführungsform die Erläuterung der physikalischen Grundlagen folgt. Den breitesten Raum nimmt naturgemäß jeweils die Darstellung der experimentellen Methoden ein, die nötigenfalls durch Hinweise auf ihre historische Entwicklung — die Bedeutung von Froude im Schiffsschleppversuchswesen beispielsweise — ergänzt wird, und die Diskussion der Versuchsergebnisse. Jedem Abschnitt ist ein umfangreiches Literaturverzeichnis beigefügt, das über alle einschlägigen, über die Behandlung der nur grundsätzlichen Fragen hinausgreifenden Arbeiten Aufschluß gibt; es soll dabei erwähnt werden, daß auch ausländische Literatur in weitgehendem Maße genannt ist.

Vom buchtechnischen Standpunkt wird man mit der Art und Weise, wie die Übersicht durch Anordnung und Druck erleichtert wird, und die Ausführung der Figuren zufrieden sein können. Besonders angenehm ist das umfangreiche Namen- und Sachregister, das den Wert des Buches als Nachschlagewerk erhöht.

Schilhansl.

A. Eucken, Lehrbuch der chemischen Physik. Zugleich 3. Aufl. des Grundrisses der physikalischen Chemie. 1037 S. 250 Fig. Leipzig 1930, Akademische Verlagsgesellschaft m. b. H. Geh. RM 54.—, geb. RM 56.—.

Als das Buch 1922 in 1. Auflage als „Grundriß der physikalischen Chemie" erschien, wurde es in dieser Zeitschrift (**24**, 287, 1923) von seinem Referenten K. F. Herzfeld als ein Werk bezeichnet, das „in mehrfacher Beziehung einem ausgesprochenen Bedürfnis entgegenkommt". Diese Beurteilung trifft heute für die 3. Auflage in vielleicht noch erhöhtem Maße zu; denn angesichts der Entwicklung, die gerade die Stoffphysik in den letzten Jahren erfahren hat, ist die Umgestaltung und der Ausbau des Euckenschen Buches (auf den doppelten Umfang) in ausgesprochen physikalischer Richtung um so mehr zu begrüßen, als das Werk schon in der ursprünglichen Fassung bekanntlich seiner ganzen Anlage nach mehr auf den physikalisch als auf den chemisch geschulten Leser eingestellt war. Diese Abgrenzung kommt jetzt auch im Titel durch die Benennung „Chemische Physik" zum Ausdruck.

In strenger Verfolgung des Gedankens, den klassischen Wissensstoff der physikalischen Chemie mit seinen überkommenen Kapiteln: Chemisches Gleichgewicht, Thermochemie, Elektrochemie, Kolloidchemie, chemische Kinetik usw. im Sinne einer rein physikalischen Systematik zu ordnen, gelingt es dem Verfasser, diese Gebiete in eine sorgfältig gegliederte Disposition zu bringen. Dies geschieht im ersten Hauptteil des Buches: Die chemisch-physikalischen Erscheinungen vom Standpunkte der Wärmelehre (620 Seiten). Nachdem aber diese Verschmelzung vollzogen ist, darf es nicht Wunder nehmen, daß die früher sehr anschauliche und gewohnte Aufteilung des Gebietes als verloren gelten muß. Diese neuartige Gruppierung bringt jedoch für den Leser oft nur die kleine Unbequemlichkeit mit sich, die gesuchte Stelle mit Hilfe des (vielleicht besser noch ausführlicheren) Namen- und Sachregisters aufsuchen zu müssen und wird aufgewogen durch den systematischen Einblick, der sich dabei in den Zusammenhang mit den Nachbargebieten eröffnet. Immerhin stellt diese Art der Darstellung an den Leser des Buches, zumal an den Neuling, erhebliche Anforderungen, so daß sich der Verfasser bei der Neuauflage dazu entschloß, dem in weiten Kreisen geäußerten Wunsch nach einer breiteren Behandlung des Stoffes nachzukommen; in der Tat ist diese Erweiterung in jeder Hinsicht als geglückt zu bezeichnen. Außerdem wurde der erste Teil durch wertvolle Ergänzungen z. B. auf dem Gebiete der Lösungen und Mischungen bereichert, dafür aber die mathematische Einleitung zweckmäßigerweise fortgelassen.

Der zweite Hauptteil des Lehrbuches: „Der Aufbau der Materie" umfaßt die Abschnitte: Atome, Molekeln, Kristalle (370 Seiten) und bringt eine wiederum hervorragend gegliederte (etwa bis Ende 1929 reichende) Darstellung dieser Gebiete in experimenteller wie in theoretischer Hinsicht. Da indessen der in diesem Abschnitt behandelte Stoff in größerem Maße Gegenstand der augenblicklichen Forschung ist, als der im ersten Hauptteil, liegt es nahe, daß die Wahl der Ableitungen und Beispiele vielleicht noch nicht immer ganz geeignet getroffen ist. Als Termschemata für Dublettsysteme einerseits, für Singulett-Triplettsysteme andererseits sind die Elemente Kalium und Kalzium (S. 768 ff.) gewählt, während hauptsächliche Untersuchungen (sensibilisierte Fluoreszenz, Stoßübertragung u. ä.) am Natrium und Quecksilber ausgeführt sind. Wünschenswert wäre ferner eine Darstellung der Beziehungen zur chemischen Kinetik, die sich auf Grund der neuen Forschungen über die Chemilumineszenz unschwer ermöglichen ließe.

Mag für das Werk, dessen Gestaltung die wissenschaftliche Persönlichkeit seines Verfassers überall erkennen läßt, auch in anderer Hinsicht bisweilen ein Vorschlag zur Änderung angemessen sein, so muß dem schönen Buche doch uneingeschränkt eine möglichst weite Verbreitung gewünscht werden namentlich unter den Lesern dieser Zeitschrift, da es ja, um mit Euckens Worten zu sprechen, „in die wichtigsten Betrachtungsweisen und Ergebnisse derjenigen Zweige der heutigen Physik einführt, die zur Chemie in naher Beziehung stehen".

J. Eggert-Leipzig.

Bruno Sander, Gefügekunde der Gesteine. (Mit besonderer Berücksichtigung der Tektonite.) Gr. 8°. VI u. 352 S. mit 155 Abbildungen im Text und 245 Gefügediagrammen. Wien, J. Springer 1930. RM 37.60, geb. RM 39.60.

Die Gefügekunde der Gesteine ist der jüngste und exakteste Zweig des Grenzgebietes zwischen Mineralogie und Geologie, um 1911 nahezu gleichzeitig und gleichstrebend entwickelt durch B. Sander (Innsbruck) und Walter Schmidt (z. Zt. Charlottenburg). Das vorliegende Werk stellt den ersten Versuch einer systematischen Durchdringung und buchmäßigen Zusammenfassung des bisher Erreichten dar. Es wird an dieser Stelle angezeigt, weil sein Inhalt zu einer Reihe von aktuellen Fragen der Kristallphysik, der Struktur und den Festigkeitseigenschaften vielkristalliner, metallischer Werkstoffe nahe Beziehungen besitzt. Insbesondere die von Walter Schmidt geschaffene statistische Erfassung der mit dem Universaldrehtisch nach Fedorow-Berek optisch bestimmten Kristallorientierungen der Gefügekörner darf des Interesses der Materialphysiker sicher sein, zumal sie einen vom Debye-Scherrer-Verfahren deutlich verschiedenen Anwendungsbereich besitzt. Das Verfahren wird hier eingehend geschildert und seine Tragweite an Hand einer sehr großen Anzahl teilweise noch unveröffentlichter Gefügediagramme dargetan. Die Wiedergabe dieser Diagramme, sowie die einer Fülle der prächtigsten mikroskopischen Schliffbilder ist mustergültig.

Gerade weil das Buch von berufenster Hand geschrieben ist und sich als Markstein der mineralogisch-petrographischen Gefügeforschung erweisen dürfte, kann der Hinweis darauf nicht unterlassen werden, daß Darstellung und Terminologie zumindest innerhalb des Zuständigkeitsgebietes der Physik Klarheit, Übersichtlichkeit und Einfachheit leider stark vermissen lassen. Eine Umarbeitung insbesondere der Abschnitte über die Analyse beliebiger plastischer Deformationszustände an Hand eines neueren Lehrbuches der Mechanik der Kontinua erscheint bei der nächsten Auflage unerläßlich, wenn der Verfasser durch sein Werk auch den Nachbarwissenschaften den Zugang zu den Ergebnissen der Gefügekunde erleichtern will, gemäß seinem schon öfters geäußerten und sicherlich sehr berechtigten Wunsche, daß auch die Nachbarwissenschaften jene Ergebnisse mit Nutzen zur Kenntnis nehmen mögen.

A. Smekal.

Max Mason and Warren Weaver, The Electro-magnetic Field. Gr.-8°. XIII u. 390 S., m. 61 Fig. Chicago-Illinois, The University of Chicago Press. 1929. Geb. $ 6.

Ein neues Lehrbuch der Maxwell-Lorentzschen Theorie der Elektrizität in englischer Sprache. Im ersten Kapitel werden, vom Coulombschen Gesetz ausgehend, die analytischen Grundlagen der Elektrostatik zunächst für Punktladungen, dann für Ladungs„komplexe" und schließlich für ponderable Körper entwickelt. Das zweite Kapitel behandelt die Verteilung der Ladungen im Leiter und im Dielektrikum, sowie die Methoden zur Berechnung der Ladungsverteilung für eine Reihe von typischen Fällen. Im dritten Kapitel wird die Magnetostatik entwickelt; unmittelbar daran schließt sich die Behandlung des Diamagnetismus, Paramagnetismus und Ferromagnetismus und der stationären elektrischen Ströme. Das letzte Kapitel enthält die Maxwellsche Feldtheorie (Feldgleichungen, Maxwellsche Spannungen, elektromagnetisches Moment, Wellengleichung, retardierte Potentiale, Feld bewegter Ladungen; Feld eines oszillierenden Dipols). Ein mathematischer Anhang von etwa 40 Seiten gibt schließlich einen Überblick über die (in dem Buch durchgängig benutzte) Vektoranalysis und über die Potentialtheorie in Vektordarstellung.

Das Lehrbuch ist vor allem dadurch ausgezeichnet, daß der Schwerpunkt offensichtlich viel weniger auf der eleganten mathematischen Darstellung, als auf einer möglichst klaren physikalischen Begründung der Theorie ruht; kritische Überlegungen zu den Grundlagen der Theorie nehmen infolgedessen einen ziemlich breiten Raum ein. Einem großen Teil der heutigen Physikergeneration gelten z. B. die Begriffe „Feld" und „Energiedichte" im leeren Raum als „anschaulich", wiewohl ja diese „Anschaulichkeit" nur durch häufigen Umgang mit diesen Begriffen entstanden sein kann. Die Autoren des vorliegenden Lehrbuchs verwerfen solche Gewohnheiten völlig (sie sehen z. B. bewußt von einer Lokalisierung der Feldenergie ab!), um den Studenten, den Träger der nächsten Physikergeneration, so wenig wie möglich mit Vorurteilen zu belasten. Dieses Bestreben ist gewiß verständlich und das Studium des Buches wird deshalb auch für den fortgeschrittenen Studenten von großem Nutzen sein. Ob aber allgemein der Verzicht auf die oben erwähnte „konventionelle" Anschaulichkeit den Erfolg des Unterrichts fördern kann, vermag der Ref. nicht zu entscheiden.

Den einzelnen Abschnitten des Buches sind zahlreiche Übungsaufgaben beigegeben. Der Druck ist sehr klar und ziemlich fehlerfrei; nur die erste Seite des Vorworts enthält ausgerechnet in einer Zeile (in den Namen Riemann, Kirchhoff, Helmholtz) drei Druckfehler.

F. Kirchner.

W. Ewald, Die optische Werkstatt. Gr.-8°. VIII u. 277 S. m. 169 Fig. u. 3 Interpolationstafeln. Verlag Gebr. Borntraeger. Berlin 1930. Geb. RM 20 —.

Im Präzisionsmaschinenbau kommen mehr und mehr die Bearbeitungs- und Prüfverfahren der Optik ihrer großen Genauigkeit wegen zur Anwendung, aber aus Mangel einer zusammenfassenden Darstellung über die modernen optischen Arbeitsmethoden, war es bisher dem Außenstehenden kaum möglich, einen genaueren Einblick in das Wesen der modernen optischen Werkstatt zu erlangen. Aus diesem Grunde hat Verf. das vorliegende Buch in erster Linie für den Werkstattpraktiker geschaffen.

In 3 Abschnitten werden in eingehender Weise behandelt:

1. Materialienkunde (Glas, Kristalle, Metalle), die Herr H. Schulz bearbeitet hat, von dessen Feder gleichfalls die beiden Kapitel Kitte und Versilberung des

2. Abschnittes — die Werkstatt — herrühren. Dieser Abschnitt nimmt naturgemäß den Hauptteil des Buches ein und gibt auf alle Fragen der Praxis erschöpfend Auskunft: z. B. über die Einrichtung der Werkstatt, über die Glasbearbeitungsmaschinen von den einfachsten Glasschneidern an bis zu den modernsten Maschinen zum Glasfräsen, zur Herstellung zylindrischer, quasitorischer und asphärischer Flächen, ferner über Maschinen zur Bearbeitung von Endflächen und zur Herstellung der Schleifschalen. Weiterhin werden in besonders ausführlicher Weise die Prüfinstrumente und ihr Gebrauch behandelt.

Im letzten Abschnitt gibt Herr Prof. Weidert in dankenswerter Weise die Interpolationstafeln nach der Hartmannschen Dispersionsformel wieder, wie sich dieselben im früheren Goerz-Laboratorium bewährt haben, zur Interpolation der Linien *A'CDFG'* des Abbeschen Systems zur Klassifikation der Gläser aus den schärfer zu messenden Quecksilberlinien.

Ein ausführliches Sachverzeichnis vervollständigt das Buch. Erwähnt sei auch die vorzügliche Ausstattung und die gute Wiedergabe der zahlreichen Abbildungen, deren Druckstöcke die betreffenden Firmen in dankenswerter Weise zur Verfügung gestellt haben.

Alles in allem also ein Buch, das jedem Experimentalphysiker oder Werkstattpraktiker warm zu empfehlen ist.

Linnemann.

W. v. Ignatowsky, Die Vektoranalysis und ihre Anwendung in der theoretischen Physik. Teil I. Die Vektoranalysis. 8°. IX u. 110 S. mit 27 Fig. 3., umgeänderte Auflage. Kart. RM 5.60. Teil II. Anwendung der Vektoranalysis in der theoretischen Physik. 8°. IV u. 123 S. mit 14 Fig. 3., neubearb. Auflage. Kart. RM 5.60. (Bd. 6,1 und 6,2 der Sammlung mathematisch-physikalischer Lehrbücher, hrsgeg. von E. Trefftz.) Leipzig-Berlin 1926. B. G. Teubner.

Die vorliegende Darstellung der Vektoranalysis ist in Rücksicht auf die Anwendungen abgefaßt. Die beiden Bändchen sind klar und verständlich geschrieben. Dem Physiker, welcher ein kleineres Lehrbuch der Vektoranalysis benötigt, sei das Werk ganz besonders empfohlen. Über den Inhalt mögen folgende Angaben Aufschluß geben: Teil I: Elementare Vektoroperationen. Differential- und Integraloperationen. Folgerungen (Greenscher Satz usw.). Lineare Vektorfunktionen (Tensoren usw.). Teil II: Mechanik: Starre, elastische, flüssige Körper; Elektrizitätslehre: Elektrostatik, Maxwell-Hertzsche und Lorentzsche Elektrodynamik. Kristalloptik. Ein Sachregister erleichtert den Gebrauch.

Haupt.

I. L. Trillat, Les Applications des Rayons X. Physique-Chimie-Metallurgie. Gr.-8°. 298 S., m. 108 Figuren. Paris, Les Presses Universitaires de France. 1930.

Das vorliegende Buch behandelt die Anwendungen der Röntgenstrahlen auf physikalisch-chemische und technische Probleme. Der Schwerpunkt der Darstellung liegt in den neueren, noch weniger bekannten Anwendungsmethoden, während z. B. die Kristallstrukturanalyse mit Röntgenstrahlen im Vergleich zu anderen Büchern gleichen Titels hier nur knapp behandelt wird.

Der erste Teil des Buches gibt einen Überblick über die Physik und Technik der Röntgenstrahlen selbst. Auf eine etwas summarische Darstellung der wichtigsten physikalischen Eigenschaften der Röntgenstrahlen folgt eine eingehendere Beschreibung verschiedener Röntgenröhren und der zum Betrieb der Röhren notwendigen Hochspannungsquellen, der zur Evakuation benutzten Pumpen und der erforderlichen Strahlenschutzmaßnahmen und schließlich ein kurzer Überblick über die wichtigsten Methoden der Röntgenspektroskopie und der röntgenometrischen Strukturanalyse.

Der zweite Teil behandelt in 7 Kapiteln das eigentliche Thema des Buchs, die Anwendungen. Von der großen Zahl der in diesem Teil ausführlich besprochenen interessanten Probleme können nur einige genannt werden: Bestimmung der Korngröße, innere Spannungen, Faserstruktur und Bearbeitung von Metallen; Studium der Kalke, Zemente, Porzellane, der Gemäldefarben, des Asbests, der Katalysatoren und der Adsorption; Studium komplizierter organischer Verbindungen, der kolloidalen Substanzen, der Zellulose und ihrer Derivate, des Kautschuks, der Harze, der Gelatine usw. Ein besonderes Kapitel ist dem flüssigen Zustand und den „mesomorphen" Zuständen gewidmet; in diesem Kapitel sind auch die interessanten Untersuchungen des Autors über die Struktur von Oberflächen und Trennungsflächen mittels der Methode „de la goutte tangente" behandelt. Das letzte Kapitel bringt schließlich einen Überblick über die Anwendungsmethoden der Röntgenstrahlen zur qualitativen und quantitativen chemischen Analyse und einen kurzen Hinweis auf die technische Materialprüfung mit Röntgenstrahlen („Radiographie"). Am Schluß jedes Kapitels befindet sich ein Literaturverzeichnis der im Text besprochenen Arbeiten. Das interessant geschriebene Buch kann sowohl zum Studium wie als Nachschlagewerk empfohlen werden; für den letzteren Zweck wäre allerdings noch die Hinzufügung eines alphabetischen Inhaltsverzeichnisses zu wünschen. Dem Ref. ist ferner eine Bemerkung auf S. 11 aufgefallen, nach der die Zerstreuung der Röntgenstrahlen durch die Atome eines Kristalls „durch einen noch wenig bekannten Mechanismus" vor sich gehen soll; ein kurzer Hinweis auf die bewährte klassische Theorie der Zerstreuung wäre an dieser Stelle wohl angebracht gewesen. F. Kirchner.

K. Fajans u. F. Wüst, Physikalisch-chemisches Praktikum. 248 S. m. 74 Abb. Akademische Verlagsges. m. b. H. Leipzig 1929. Preis geb. RM 13.50.

Das physikalisch-chemische Praktikum bildet seit einigen Jahren einen obligatorischen Bestandteil der Ausbildung aller Chemiker in mittleren Semestern, die wohl allgemein schon vorher ein längeres physikalisches Praktikum erledigt haben. Die vorliegende, ausgesprochen pädagogisch eingestellte Anleitung hat unter den Lehrern und den Studenten seit ihrem Erscheinen schon zahlreiche Freunde gefunden. In der Tat spürt sie geduldig allen Nöten des Praktikanten nach. Hierbei wird für den Physiker nicht uninteressant sein zu erfahren, welche Punkte (nach Absolvierung des physikal. Praktikums) den erfahrenen Verfassern noch als erwähnenswert erscheinen. Die Erfahrung des Praktikums bestätigt jedenfalls häufig, daß so elementare physikalische Ausführungen wie die z. B. über elektr. Meßinstrumente auf S. 137 ff. durchaus kein Luxus sind, im Gegenteil bittere Notwendigkeiten. Im übrigen handelt es sich um eine Sammlung eingehend durchgearbeiteter zuverlässiger Arbeitsvorschriften, von denen manche auch dem Physiker gelegentlich recht nützlich werden können, wenn er eine physikalisch-chemische Bestimmung zu machen hat oder wenn er ähnliche Aufgaben in sein physikalisches Praktikum aufnehmen will. Die Hauptgegenstände der Übungen sind: Molargewichtsbestimmung in Lösungen, Dampfdruck und Destillation, Oberflächenspannung und innere Reibung von Flüssigkeiten, Adsorption, Koagulation eines Sols, p_H-Bestimmung mit Indikatoren, Kalorimetrie, Metallographie, Reaktionsgeschwindigkeiten (darunter radioaktiver Zerfall), Refraktometrie, Lichtabsorption, elektrische Leitfähigkeit, Überführung, E.M.K. Das Buch dürfte nach Inhalt und Form sowie Ausstattung zu den empfehlenswertesten seiner Art gehören.

L. Ebert.

I. L. Coolidge, Einführung in die Wahrscheinlichkeitsrechnung. Deutsche Ausgabe von F. M. Urban. (Bd. 24 der Sammlung mathematisch-physikalischer Lehrbücher, herausgeg. von E. Trefftz.) 8°. IX und 212 S. Leipzig-Berlin, B. G. Teubner. 1927. Geb. RM 10.—.

Das Buch gibt eine erste Einführung in die Wahrscheinlichkeitsrechnung. Die begrifflichen Grundlagen werden klar entwickelt, indem der Verfasser gewisse empirische Annahmen zugrunde legt; beispielsweise wird als „erste empirische Annahme" postuliert, daß bei den betrachteten Reihen von Erscheinungen die relative Häufigkeit derjenigen Fälle, welche ein bestimmtes Ergebnis liefern, bei unbeschränkt wachsender Versuchszahl einem Grenzwert sich nähert. (Allerdings reichen die weiterhin gemachten Annahmen nicht, wie es scheinen möchte, völlig aus, um den Satz von der Multiplikation der Wahrscheinlichkeiten zu gewinnen.) Auch im übrigen ist die Darstellung durchaus zuverlässig und auf beachtlicher Höhe. Indes wäre gelegentlich größere Deutlichkeit im Ausdruck erwünscht.

Als für den Physiker von Interesse möge aus dem Inhalt hervorgehoben werden: Die Lehre von den Mittelwerten und von der Dispersion (Kap. 4), Fehlertheorie (Kap. 7 und 8), vermittelnde Beobachtungen (Kap. 9), kinetische Gastheorie (Kap. 10) (das letzte [11.] Kapitel bringt das wichtigste aus der Versicherungsrechnung).

Wir möchten das Buch empfehlen, zumal es beim Leser an Vorkenntnissen wenig voraussetzt (die Elemente der Differential- und Integralrechnung).

Haupt.

L. Bieberbach, Analytische Geometrie (Bd. 29 der Sammlung: Teubners mathematische Leitfäden). kl.-8°. IV und 120 S., mit 39 Figuren. Leipzig-Berlin, B. G. Teubner. 1930. Karton. RM 6.60.

Mit obigem Leitfaden zeigen wir eine sehr begrüßenswerte Neuerscheinung an. Bietet er doch dem Anfänger (welcher allerdings über die üblichen Schulkenntnisse verfügen muß) eine Einführung bequemen Umfanges in die analytische Geometrie der Ebene und des Raumes; eine Einführung, die der modernen Entwickelung durchaus Rechnung trägt und übrigens gleichzeitig die Anfangsgründe der Vektor- und Matrizenrechnung gibt, was für den Physiker von Interesse ist. Zahlreiche Beispiele und Fragen erläutern die allgemeinen Darlegungen und regen zur selbständigen Anwendung der Methoden an. Es muß hier genügen, nur noch in Kürze über Inhalt und Stoffanordnung zu berichten: Nachdem (§ 1) Vektor, Vektoraddition, Multiplikation mit Skalaren zunächst anschaulich eingeführt sind, werden sie (§ 2) axiomatisch definiert und es wird durch ein weiteres Axiom die Dimension des jeweils betrachteten Raumes festgelegt. Es folgen (nach Einführung der Begriffe Punkt, Gerade, Ebene) als Beispiele die Beweise zahlreicher elementargeometrischer Sätze lediglich mit Hilfe der Axiome (§ 3). Sodann werden (§ 4) die Begriffe: inneres Produkt bzw. Länge, Winkel, orthogonal eingeführt. In § 6 treten Flächeninhalt und Volumen hinzu, welche zu einer Einführung in die Determinantentheorie Anlaß geben; Anwendungen auf die Theorie der linearen Gleichungen schließen sich an. § 8 bringt das Vektorprodukt. Mit der Betrachtung der Bewegungen und Umlegungen (§ 10) vollzieht sich dann der Übergang zur Matrizenrechnung und zu ihren Anwendungen. Zu letzteren zählt im weiteren Verlauf namentlich die (orthogonale) Transformation der Kurven und Flächen 2. Ordnung auf Normalformen (§§ 15—17). Bemerkungen über affine Abbildungen und ein Sachregister beschließen den Leitfaden. Er kann dem mathematisch interessierten Physiker nur bestens empfohlen werden. Haupt.

R. Staub, Der Bewegungsmechanismus der Erde. 8°. VIII u. 270 S. mit 1 Erdkarte u. 44 Textfiguren. Berlin 1928. Gebr. Borntträger. Geh. RM 18.—, geb. RM 20.50.

Den Hauptteil des Buches machen die Analysen insbesondere der alpinen, daneben der herzynischen und kaledonischen Faltungen aus, auf deren Ergebnisse Staub seine Erklärung der Faltungsvorgänge aufbaut. Die ganze Verteilung der alpinen Gebirge geht im Grunde zurück „auf das Gegeneinanderrücken der großen irdischen Grundkontinente Laurasia und Gondwana und deren seitliche Einspannung durch den Widerstand des Pazifik", diejenige Stelle, wo sich die Mondmasse von der Erdoberfläche ablöste. Die Westdrift des ganzen Systems tritt nur als bescheidenes modifizierendes Detail hinzu. Die primäre Ursache des Aufeinanderrückens der beiden Urkontinente ist die Polflucht. Sie wird automatisch abgelöst durch eine Poldrift. Infolge der Gebirgsbildung ist nämlich das Gleichgewicht der subkrustalen magmatischen Massen gestört; sie beginnen daher nach den polwärts gelegenen Gegenden mit Druckentlastung zu fließen und schleppen dabei die Kontinente solange mit, bis wieder die Polfluchtkraft überwiegt und die subkrustalen Strömungen infolge der aufs neue geänderten Druckverteilung wieder äquatoriale Richtung annehmen. Dieser Vorgang wiederholt sich, wie die drei oben erwähnten Faltungen beweisen.

Verf. stützt diese seine Ansichten fast nur auf die von ihm gegebenen Deutungen der großen irdischen Faltungen. Über die Richtigkeit dieser Faltungsanalysen zu entscheiden ist Sache der Geologen. Ob die postulierte Poldrift der Kontinente durch die mitschleppende Kraft der subkrustalen Gegenströmungen erklärt werden kann, muß zweifelhaft erscheinen. Vor allem wäre es zu wünschen, daß der Autor neben den geologischen auch noch geophysikalische, z. B. paläoklimatische Argumente in reichlicherem Maße bringen würde. Immerhin ist die dargelegte Auffassung gerade bei der gegenwärtigen Häufung geotektonischer Hypothesen nicht ohne Interesse. Eine eingehendere Würdigung des Buches von geophysikalischer Seite wäre deshalb zu begrüßen. Haurwitz.

A. Hurwitz — C. Courant, Funktionentheorie. Gr.-8°. XII u. 534 S. mit 152 Abb. 3., vermehrte und verbesserte Auflage. Berlin 1929. J. Springer. Geh. RM 33.—, geb. RM 34.80. (Bd. 3 der Sammlung „Grundlehren der mathematischen Wissenschaften in Einzeldarstellungen".)

Das Buch zerfällt in zwei Teile: Den ersten bildet eine von Hurwitz herrührende Darstellung der Elemente der (Weierstraßschen) Funktionentheorie, dazu eine knappe, aber recht vollständige und übersichtliche Einführung in die Theorie der elliptischen Funktionen. Der zweite, von Courant geschriebene Teil führt in die geometrische (Riemannsche) Funktionentheorie ein; insbesondere wird also die Theorie der konformen Abbildung gebracht, wobei für Existenzbeweise das Dirichletsche Prinzip benutzt wird. Aus dieser Inhaltsangabe wird der mathematische Physiker bereits entnehmen, daß das Buch seiner besonderen Aufmerksamkeit wert ist, insbesondere auch im Hinblick auf den geometrisch-funktionentheoretischen Teil. Das treffliche, klar und verständlich geschriebene Werk hat seine Brauchbarkeit auch dadurch erwiesen, daß bereits eine dritte Auflage notwendig geworden ist. Wir können die vorliegende Neuauflage umso angelegentlicher empfehlen, als wiederum eine Reihe bemerkenswerter Verbesserungen vorgenommen worden ist. Es sei beispielshalber nur auf den Beweis des Riemannschen Abbildungssatzes hingewiesen, der in seiner Durchsichtigkeit wohl kaum mehr zu übertreffen sein dürfte. Haupt.

Cl. Schaefer und H. Matossi. Der Ramaneffekt (Fortschritte der Chemie). Bd 20, Heft 6. 52 S. mit 13 Tabellen und 13 Abb. Berlin 1930. Verlag Gebr. Borntraeger. RM 8.—.

Die kleine Schrift enthält die Theorie (auf klassischer und wellenmechanischer Grundlage,) sowie die

ersten wesentlichen Ergebnisse der experimentellen Erforschung des Ramaneffektes. Auf eine vollständige Bibliographie wird unter Hinweis auf Ganesan, Ind. Journ. of Phys. 4, 281, 1929 verzichtet, obwohl dieses nicht in allen Instituten und Bibliotheken zur Verfügung steht. Eingehend wird der Zusammenhang von Ramanspektrum und Ultrarotspektrum behandelt.

Die zahlenmäßigen Angaben sind natürlich bei der intensiven Bearbeitung des Ramaneffektes schon vielfach zu korrigieren und zu erweitern; als Mangel empfindet man das Fehlen von Angaben über die Genauigkeit der Frequenzverschiebungsmessungen. Hier wird auch in Originalarbeiten viel gesündigt; es ist keine Frage, daß eine Erhöhung der Meßgenauigkeit und besonders eine Beachtung der Breite der Ramanlinien wichtige neue Gesichtspunkte liefern wird.

Wer über den Ramaneffekt arbeitet, braucht das Büchlein von Schaefer-Matossi, seine Wichtigkeit rechtfertigt aber nicht den ungeheuren Preis des geheften Exemplares: 52 Seiten für 8 Mark ist einfach nicht mehr angängig, zumal nur ganz primitive Abbildungen darin enthalten sind. In Frankreich erscheinen gute kleine Monographien gleicher Art mit Figuren, klarem Druck und festem Papier, welche cet. par. noch nicht den dritten Teil kosten (im Verlag Gauthier-Villars „Mémorial des sciences physiques").

Hoffentlich geht trotz dieses pekuniären Hindernisses der Absatz so schnell, daß in kürzester Zeit eine Neuauflage des experimentellen Teils erscheinen kann.

Walther Gerlach.

Arthur Haas, Materiewellen und Quantenmechanik. 3. Aufl. Kl.-8°. VII u. 202 S. mit 6 Fig. Leipzig 1930. Akademische Verlagsgesellschaft m. b. H. Geh. RM 7.—, geb. RM 8.—.

Das sich als Einführung in die Wellenmechanik immer wieder bewährende Büchlein (siehe die Besprechung der früheren Auflagen dieser Zeitschr. **30**, 488, 1929), ist in der neuen Auflage um zwei weitere Kapitel bereichert worden. Das eine behandelt ausführlich die theoretischen Grundlagen der Entdeckung des Parawasserstoffs, das andere enthält die Anwendung der Wellenmechanik auf das Problem der Radioaktivität. Die Kapitel über die Beugung der Materiewellen und über die Diracsche Theorie des Elektrons haben eine Umarbeitung und Vervollständigung erfahren.

Lanczos.

K. Gruhn, Anfangsgründe der Wechselstromtechnik. Gr.-8°. VII u. 82 S. Dresden u. Leipzig, Th. Steinkopff. 1930. kart. RM 5.80.

Das klar und knapp geschriebene Buch stellt sich die Aufgabe, den mittleren Techniker an technischen Lehranstalten und den Anfänger an technischen Hochschulen ohne die Hilfsmittel der höheren Mathematik in die Rechenmethode der Wechselstromtechnik einzuführen. Vorausgesetzt wird daher nur Elementarmathematik, Trigonometrie und einige Kenntnis der Elektrizitätslehre. Sehr bald wird die Vektordarstellung der Wechselstromgrößen eingeführt. Behandelt werden u. a. Transformator, Leistungsmessung bei Drehstrom, Spannungs- und Stromresonanz, 90°-Schaltung, Resonanztransformator.

Außer den nötigen Angaben über Meßmethoden finden sich vor allem eine Menge durchgerechneter Übungsbeispiele. Auf die technischen Anwendungen des Wechselstroms wird nur andeutungsweise eingegangen. Eine Reihe schöner Figuren erleichtert das Verständnis des nützlichen Werkes.

E. Nies.

A. Magnus, Lehrbuch der Thermodynamik für Studierende der Chemie und verwandter Wissenschaften. Gr.-8°. XII u. 288 S. mit 23 Abb. Leipzig 1929. Akademische Verlagsgesellschaft m. b. H. Geh. RM 16.—, geb. RM 18.—.

Diese ausdrücklich für Nichtphysiker bestimmte Thermodynamik gibt in ihrer ersten Hälfte eine auf Kreisprozesse gegründete Darstellung der beiden ersten Hauptsätze, in der zweiten Hälfte wird der Formulierung und der Anwendung des zweiten Hauptsatzes der Entropiebegriff zugrunde gelegt, dann wird abschließend das Nernstsche Theorem behandelt. Der Leser wird von den einfachsten Grundlagen an ausführlich, ohne Sprünge im Gange der Überlegung oder Rechnung, zu den praktisch wichtigen Sätzen und Formeln geführt; die oft mißbrauchte Wendung: „eine einfache Rechnung ergibt" wird vermieden. Ref. konnte allerdings den Eindruck nicht unterdrücken, daß der Darstellung schärferes plastisches Herausarbeiten des physikalischen Inhaltes einen größeren Nutzeffekt bei dem jüngeren Leser verschaffen hätte können. Die mehr formale Behandlung, etwa bei der Einführung in den Gedankenkreis des Nernstschen Theorems, läßt die wichtigen qualitativen Tatsachenzusammenhänge schwieriger erkennen als wünschenswert gerade für den Chemiker ist, dem die deutliche Erkenntnis solcher Zusammenhänge gelegentlich noch wichtiger sein muß als die bis in Feinheiten strenge Durchrechnung einzelner Fälle. Das Buch enthält wesentlich den eisernen Bestand an Thermodynamik in einer Form, die sich an klassisch gewordene Vorbilder anschließt und wird besonders als Ergänzung von physikalisch-chemischen Lehrbüchern nützlich sein. Die Ausstattung ist sehr gut.

L. Ebert.

Personalien.

(Der Herausgeber bittet die Herren Fachgenossen, der Schriftleitung von eintretenden Änderungen möglichst bald Mitteilung zu machen.)

Habilitiert: An der Universität Erlangen Dr. Alfred Rische für Chemie und Dr. Hans Kroepelin für Physikalische Chemie.

Ernannt: Dr. Ing. E. Wieselsberger vom Kaiser-Wilhelm-Institut für Strömungsforschung in Göttingen zum ord. Professor für angewandte Mathematik und Strömungslehre an der Technischen Hochschule Aachen.

Für die Schriftleitung verantwortlich Prof. Dr. P Debye in Leipzig. — Verlag von S. Hirzel in Leipzig.
Druck von August Pries in Leipzig.